ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CHARLES PISOT

La répartition modulo 1 et les nombres algébriques

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 7, nº 3-4 (1938), p. 205-248

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_3-4_205_0>

LA RÉPARTITION MODULO 1 ET LES NOMBRES ALGÉBRIQUES

par M. CHARLES PISOT (Paris).

Introduction.

L'étude des valeurs prises par une fonction périodique de période 1 (le cas d'une période quelconque se ramène facilement à celui-ci) conduit à considérer comme équivalentes deux valeurs de l'argument qui ne diffèrent que par un entier, c'est-à-dire qui sont congrues modulo 1. Quand l'argument parcourt une suite dénombrable S de valeurs $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ on pourra, dans le calcul des valeurs correspondantes de la fonction, substituer à S une suite Δ: $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n, \dots$, où $\delta_n \equiv u_n \pmod{1}$. Si ces quantités δ_n sont toutes contenues dans un même intervalle I de longueur 1, nous appellerons la suite Δ la « répartition (mod. 1) » de la suite S. Le premier exemple a été fourni par les séries de FOURIER où la suite $u_n = na$. D'autre-part considérons une suite dénombrable de fonctions données continues et admettant des fonctions inverses. On est conduit à un problème de la même nature par l'étude de l'approximation d'une ou de plusieurs quantités par des valeurs prises par ces fonctions quand on donne aux variables des valeurs entières. Soient par exemple données les fonctions $\varphi_n(x, y)$ et $\psi_n(x, y)$; soient $x = f_n(\varphi_n, \psi_n)$, $y = g_n(\varphi_n, \psi_n)$ leurs fonctions inverses, et α et β deux nombres. Les entiers a_n et b_n les plus voisins respectivement de $f_n(\alpha, \beta)$ et de $g_n(\alpha, \beta)$ donneront souvent à $\varphi_n(a_n, b_n)$ et $\psi_n(a_n, b_n)$ les valeurs les plus approchées de α et de β. L'approximation obtenue résultera encore de l'étude modulo 1 des suites $u_n = f_n(\alpha, \beta)$, $v_n = g_n(\alpha, \beta)$.

L'attention des mathématiciens a été attirée sur ces problèmes par les travaux de MM. HARDY et LITTLEWOOD (1) communiqués en 1912 au 5e Congrès des mathématiciens. Peu après, en 1914, M. H. WEYL (2) a exposé une méthode très importante. Soit d_n le nombre des éléments de la suite Δ dont l'indice ne dépasse pas n et qui sont contenus dans un intervalle de longueur d. On dit que la suite S est « équirépartie (mod. 1) » si le rapport $\frac{d_n}{n}$ a une limite égale à d

(1) Proc. 5th Int. Congress Math. Cambridge, T. 1 (1912), pp. 223-229 et Proc. London Math. Society, T. 11 (1912), pp. XXI-XXII.

(2) Nach. Ges. Wiss. Göttingen, 1914, pp. 234-244 et Math. Annalen, T. 77 (1916), pp. 313-352.

quand n augmente indéfiniment, quelle que soit la position et la longueur de l'intervalle de longueur d dans l'intervalle I. M. H. WEYL établit alors que la condition nécessaire et suffisante pour que la suite S soit équirépartie (mod. 1) c'est que, pour tout entier h: $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n} e^{2\pi i h u_m} = 0$. Cette condition lui permet de montrer que la suite S est équirépartie si u_n est un polynôme en n ayant au moins un coefficient irrationnel différent du terme constant. Le principe de la démonstration a été explicité par M. VAN DER CORPUT (3) et tient dans la proposition suivante: la suite S est équirépartie (mod. 1) si, pour toutes les valeurs de l'entier h, il en est ainsi des suites S_h d'éléments $u_{n+h} - u_n$. Ces résultats ont eu une application très importante dans l'étude du problème de WARING par les méthodes de HARDY et LITTLEWOOD.

Quand u_n est une fonction croissant assez régulièrement avec n, on peut résumer les résultats obtenus par divers auteurs de la façon suivante: Si la croissance avec n de u_n ne dépasse pas celle d'un polynôme en n, la suite S est équirépartie (mod. 1) ou ne l'est pas suivant que cette croissance est plus rapide que celle de $\log n$ ou non (4). Au contraire quand la croissance de u_n avec n dépasse celle d'un polynôme en n, on n'a pas obtenu des résultats aussi complets. Si $u_n = f_n(a)$ dépend d'une façon assez régulière d'un paramètre a, M. KOKSMA (5), en utilisant la méthode employée par H. WEYL (6) pour $u_n = af(n)$, a démontré que les valeurs de a pour lesquelles la suite S n'est pas équirépartie (mod. 1) forment un ensemble de mesure nulle au sens de BOREL-LEBESGUE. Le résultat de WEYL-KOKSMA s'applique en particulier aux suites $u_n = \lambda a^n$, $a > 1$, a et λ étant considérés comme paramètres. Le but du présent travail est l'étude de cet ensemble de valeurs du paramètre. Plus généralement nous supposerons que nous avons un système de r suites $u_{n,1}; \ldots; u_{n,r}$ dépendant de r paramètres $a_1, \ldots, a_r$.

Le premier chapitre contient l'exposé d'une méthode permettant sous certaines conditions d'obtenir simultanément pour chacune des r suites une répartition approximativement donnée d'avance. Le principe en est le suivant: soient $\gamma_{0,h}$; $\gamma_{1,h}; \ldots; \gamma_{n,h}; \ldots$ $(h = 1, 2, \ldots, r)$ un système Γ, indépendant des paramètres, de r

(3) Math. Zeitschrift, T. 29 (1929), pp. 397-426 et Acta mathematica, T. 56 (1931), pp. 373-456.

(4) POLYA-SZEGÖ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* T. I (1925), Chap. II, 4. - CSILLAG, Acta Litt. Sci. Szeged, T. 4 (1929), pp. 151-154 et T. 5 (1930), pp. 13-18. - KOKSMA, Mathematica, T. 1 (1933), pp. 245-248 et T. 2 (1933), pp. 1-6 et pp. 107-114. - VAN DER CORPUT, Acta mathematica, T. 56 (1931), pp. 373-456.

(5) Compositio mathematica, T. 2, (1935), pp. 250-258.

Pour une bibliographie plus détaillée voir: KOKSMA: *Diophantische Approximationen*. Ergebnisse der Mathematik, T. IV, 4.

(6) Voir la note (2).

répartitions données d'avance. Posons $u_{n,h}=a_{n,h}+\gamma_{n,h}+\varepsilon_{n,h}$ où $-\frac{1}{2}<\varepsilon_{n,h}\leqq\frac{1}{2}$ et où $a_{n,h}$ est un nombre entier. L'élimination des r paramètres $\alpha_1,\ldots, \alpha_r$ donne un système récurrent $u_{n+1,h}-F_{n,h}(u_{n,1};\ldots; u_{n,r})=0$. Les fonctions $F_{n,h}$ étant supposées continues, quand on substitue $a_{n,h}+\gamma_{n,h}$ à la place de $u_{n,h}$, l'expression obtenue au premier membre sera en valeur absolue inférieure à $1/2$, si $|\varepsilon_{n,h}|<c_{n,h}$, $c_{n,h}$ étant assez petit. L'entier $a_{n+1,h}$ est donc déterminé par $a_{n,1};\ldots; a_{n,r}$ et les systèmes E de suites $a_{0,h}; a_{1,h};\ldots; a_{n,h};\ldots$ sont dénombrables. Si les termes $u_{n,h}$ croissent assez régulièrement avec les paramètres et assez vite avec n, un système E détermine r valeurs $\alpha_1,\ldots, \alpha_r$ des paramètres, et deux systèmes différents de paramètres ne peuvent donner naissance à la même suite E. L'ensemble des valeurs des paramètres pour lesquels les suites S ont des répartitions $\delta_{n,h}$ telles que $|\delta_{n,h}-\gamma_{n,h}|<c_{n,h}$ sont donc dénombrables. Si les $u_{n,h}$ croissent encore plus vite avec n on peut montrer que toutes les suites S construites par ce procédé ont des répartitions $\delta_{n,h}$ telles que $|\delta_{n,h}-\gamma_{n,h}|<c'_{n,h}$, $c'_{n,h}$ étant une quantité un peu plus grande que $c_{n,h}$.

Le deuxième chapitre montre l'application de ces méthodes au cas particulier où u_n vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. Je supposerai que dans l'expression $u_n=\lambda_1(n)\alpha_1^n+\lambda_2(n)\alpha_2^n+\ldots+\lambda_s(n)\alpha_s^n$ où $\alpha_1,\ldots, \alpha_s$ sont les racines de l'équation caractéristique de la récurrence,

1°) les coefficients des polynômes $\lambda_h(n)$ sont seuls paramètres;

2°) les coefficients sont fixes et les racines sont paramètres;

3°) les coefficients et les racines sont à la fois paramètres.

Dans chacun de ces cas il n'y a qu'un ensemble dénombrable de telles suites S pour lesquelles $|\varepsilon_n|$ est borné par une quantité fixe c suffisamment petite. D'autre part le procédé de construction des suites E donne toutes les valeurs des paramètres pour lesquelles $|\varepsilon_n|<c'$, où c' est un nombre convenable supérieur à c, et en particulier pour lesquelles les suites S ne sont pas équiréparties (mod. 1). Cela permet de montrer par exemple dans le cas $u_n=\lambda\alpha^n$ étudié par M. KOKSMA que pour $\alpha>3$ l'ensemble des valeurs de α de cette nature, λ étant fixe, a la puissance du continu dans tout intervalle.

Dans le troisième chapitre j'étudie l'ensemble dénombrable des suites S récurrentes correspondant à la répartition Γ: $(0, 0,\ldots, 0,\ldots)$. En utilisant les déterminants qui expriment la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, je démontre qu'il en est ainsi pour les suites E si la série $\sum_{n=0}^{\infty}|\varepsilon_n|^2$ est convergente. Cela entraîne que dans l'expression

$$u_n=\lambda_1(n)\alpha_1^n+\lambda_2(n)\alpha_2^n+\ldots+\lambda_s(n)\alpha_s^n$$

les nombres $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_s$ tels que $|\alpha_1|>1$, $|\alpha_2|>1,\ldots, |\alpha_s|>1$ sont des entiers algébriques d'une certaine nature et que les polynômes $\lambda_1(n), \lambda_2(n),\ldots, \lambda_s(n)$ sont à coefficients algébriques. Je donne diverses applications des résultats précédents. Ainsi si les nombres α_1, α_2,...., α_s sont algébriques mais ne vérifient pas toutes les conditions précédentes, la répartition (mod. 1) de la suite S a une infinité de valeurs d'accumulation. De même j'obtiens des inégalités vérifiées par les racines des équations à coefficients entiers.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à l'étude plus détaillée de la suite $u_n=\lambda\alpha^n$ quand α et λ sont paramètres. Les suites E sont alors déterminées par les inégalités

$$-\frac{1}{2}<a_{n+2}-\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\leqq\frac{1}{2}.$$

Je montrerai que dès que $a_1>a_0$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ a une limite $\tau\geqq 1$. L'ensemble en infinité dénombrable des valeurs de τ contient tous les nombres algébriques $\varrho>1$ tels que les modules de tous les autres conjugués soient inférieurs à 1. Il est d'ailleurs probable que les deux ensembles coïncident; je montre en particulier que si $a_0=2$ ou si $a_0=3$, les nombres τ obtenus sont bien des nombres ϱ. Je termine par l'énoncé de quelques critères d'algébricité et de transcendance déduits de ces études. Ainsi s'il existe une suite d'entiers a_0, a_1,...., a_n,.... et un nombre $\alpha>1$ tel que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\alpha\right|<\frac{1}{a_n^{1+\varepsilon}}, \qquad \varepsilon>0$$

α est un entier algébrique ϱ, et le degré de ce nombre ϱ ne peut dépasser $1+\dfrac{1}{\varepsilon}$. Je montre également que la condition nécessaire et suffisante pour que le nombre réel λ soit transcendant est que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin^2(\pi\lambda x^n)$ diverge pour tout $x\geqq 1$.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma très vive reconnaissance à M. A. DENJOY qui n'a cessé de m'encourager et de me conseiller au cours de mon travail. J'adresse des remerciements très sincères à M. E. CARTAN qui a bien voulu présenter à l'Académie les principaux résultats (7). En outre je remercie M. L. TONELLI de m'avoir fait l'honneur d'acueillir ce mémoire aux Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa. En même temps je tiens à témoigner toute ma gratitude à M. C. CHEVALLEY dont les conseils de rédaction m'ont été très utiles.

(7) C. R. Ac. Sc. Paris, T. 202 (1936), p. 892, T. 203 (1936), p. 148, T. 204 (1937), p. 312, T. 204 (1937), p. 1853.

CHAPITRE I.

Etude modulo 1 d'un système de suites dépendant de plusieurs paramètres.

NOTATIONS: Pour simplifier l'exposé nous allons utiliser un langage et des notations géométriques. Soit R^r un espace vectoriel à r dimensions et $\vec{\alpha}$ le vecteur de cet espace de composantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Dans ce chapitre h et k désigneront des indices indépendants l'un de l'autre, parcourant les valeurs 1, 2,...., r. Nous métriserons l'espace R^r par la définition suivante de la distance, introduite par MINKOWSKI (Strahldistanz): la longueur du vecteur $\vec{\alpha}$, que nous noterons $|\vec{\alpha}|$, sera la plus grande des r valeurs $|\alpha_h|$. La distance des deux points $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ sera $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$. $I(\vec{\alpha}, \delta)$ sera le domaine des points $\vec{\beta}$ pour lesquels $|\vec{\beta}-\vec{\alpha}|<\delta$ et de façon plus précise $I(\vec{\alpha}, \vec{\delta})$ sera le domaine des points $\vec{\beta}$ pour lesquels on a simultanément $|\beta_h-\alpha_h|<\delta_h$. Si A est un domaine de R^r, nous désignerons par $\bar{A}$ sa fermeture. Enfin nous représenterons par $\vec{\alpha}=\varphi(\vec{u})$ une transformation de l'espace R^r, cette relation équivalant aux r relations: $\alpha_h=\varphi_h(u_1, u_2, \ldots, u_r)$.

LEMME I. - *Soient donnés deux domaines A et U de R^r et une application topologique $\vec{\alpha}=\varphi(\vec{u})$ de $\bar{U}$ sur $\bar{A}$. Supposons que les fonctions φ_h admettent dans U des dérivées partielles par rapport aux u_k bornées en valeur absolue par un nombre c. $\vec{u}_0$ étant un point de U, soit δ la distance de $\vec{\alpha}_0=\varphi(\vec{u}_0)$ à la frontière de A. La distance de $\vec{u}_0$ à la frontière de U est $\geqq \frac{\delta}{rc}$.*

Supposons le lemme faux pour un point $\vec{u}_0$. Dans $I\left(\vec{u}_0, \frac{\delta}{rc}\right)$ on pourrait trouver un point $\vec{v}_0$ de la frontière de U, tel que les points $\vec{v}$ du ségment d'extrémités $\vec{u}_0, \vec{v}_0$ soient contenus dans U, sauf $\vec{v}_0$. En posant $\vec{\beta}=\varphi(\vec{v})$ on aurait:

$$|\vec{\beta}-\vec{\alpha}_0|=|\varphi(\vec{v})-\varphi(\vec{u}_0)|\leqq rc|\vec{v}-\vec{u}_0|\leqq rc|\vec{v}_0-\vec{u}_0|=\delta'<\delta.$$

Or si l'on fait tendre $\vec{v}$ vers $\vec{v}_0$, $\vec{\beta}$ tend vers un point de la frontière de A, ce qui nous amène à une contradiction.

On donne une suite S de transformations $\vec{u}_n=f_n(\vec{\alpha})$ définies quand $\vec{\alpha}$ est dans une région $\bar{A}$, A étant un domaine de R^r.

CONDITIONS I:

1°). *Les fonctions $f_{n,h}$ sont continuement différentiables dans A.*

2°). *f_n est une application topologique de $\bar{A}$ sur une région $\bar{U}_n$. On supposera définie dans $\bar{U}_n$ l'application inverse $\vec{\alpha}=\varphi_n(\vec{u}_n)$ de $\bar{U}_n$ sur $\bar{A}$.*

3°). *Dans U_n les dérivées partielles des fonctions $\varphi_{n,h}$ par rapport aux $u_{n,k}$ sont bornées en valeur absolue par un nombre ψ_n qui tend vers* 0 *avec* $\frac{1}{n}$.

Lemme II. - *Sous les conditions I, soit $\vec{a}$ un point fixe de A. v_0, v_1,...., v_n,... étant une suite de points de R^r telle que $|\vec{v_n}|$ reste borné supérieurement, $f_n(\vec{a})+\vec{v_n}$ est contenu dans U_n à partir d'un certain indice n_0. De plus*

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n[f_n(\vec{a})+\vec{v_n}]=\vec{a}.$$

Soit δ la distance de $\vec{a}$ à la frontière de A. En vertu du lemme I, U_n contient $I\left[f_n(\vec{a}), \frac{\delta}{r\psi_n}\right]$. $\frac{\delta}{r\psi_n}$ augmentant indéfiniment avec n, la première partie est démontrée. La seconde est évidente puisque

$$|\varphi_n[f_n(\vec{a})+\vec{v_n}]-\vec{a}|\leqq r|\vec{v_n}|\psi_n.$$

On désignera par $F_m^n(\vec{u_n})$ l'application topologique $\vec{u_m}=f_m[\varphi_n(\vec{u_n})]$ de $\overline{U}_n$ sur $\overline{U}_m$. Soient $u_{m,h}=F_{m,h}^n(u_{n,1};....;u_{n,r})$ ses r fonctions composantes et $F_{m,h}^{n,(k)}$ la dérivée partielle de $F_{m,h}^n$ par rapport à $u_{n,k}$. Nous poserons

$$G_{m,h}^{n,(k)}(\vec{u_n})=\frac{1}{F_{m,h}^{n,(k)}(\vec{u_n})}.$$

Donnons nous r suites Γ_h: $\gamma_{0,h}$; $\gamma_{1,h}$;....; $\gamma_{n,h}$;.... arbitraires de nombres tels que $-\frac{1}{2}<\gamma_{n,h}\leqq\frac{1}{2}$. Ces suites étant données, nous pouvons, à chaque $\vec{a}$ de A, faire correspondre r suites E_h: $a_{0,h}$; $a_{1,h}$;....; $a_{n,h}$;.... de nombres entiers définis de la manière suivante: $a_{n,h}$ est l'entier le plus voisin de $u_{n,h}-\gamma_{n,h}$; de sorte que $u_{n,h}=a_{n,h}+\gamma_{n,h}+\varepsilon_{n,h}$ avec $-\frac{1}{2}<\varepsilon_{n,h}\leqq\frac{1}{2}$.

Nous désignerons par $\vec{a_n}$, $\vec{\gamma_n}$, $\vec{\varepsilon_n}$, les vecteurs dont les composantes respectives sont $a_{n,h}$; $\gamma_{n,h}$; $\varepsilon_{n,h}$, et par E et par Γ les suites $(\vec{a_0}, \vec{a_1},...., \vec{a_n},....)$ et $(\vec{\gamma_0}, \vec{\gamma_1},...., \vec{\gamma_n},....)$.

$\vec{a}$ étant un élément fixe de A, nous supposons vérifiées les conditions suivantes:

Conditions II: *Soit $\vec{v_n}$ une suite de points de R^r telle que $|\vec{v_n}|$ soit borné, et de plus que*

$$|\vec{v_n}|\leqq c \underset{1\leqq k\leqq r}{\text{borne}} |F_{n+1,h}^{n,(k)}[f_n(\vec{a})]|$$

c étant fixe. Posons:

$$\mu_{n,h}^k=\frac{F_{n+1,h}^{n,(k)}[f_n(\vec{a})+\vec{v_n}]}{F_{n+1,h}^{n,(k)}[f_n(\vec{a})]}.$$

Nous supposerons que pour tout point a de A on ait:

$$\lim_{n=\infty} \mu_{n,h}^{k}=1.$$

REMARQUES: $|\vec{v}_n|$ est borné, donc d'après le lemme II le quotient $\mu_{n,h}^{k}$ existe à partir d'un certain rang.

Les conditions II sont remplies en particulier si les fonctions $G_{n+1,h}^{n,(k)}[f_n(\vec{a})]$ *possèdent elles mêmes dans A des dérivées partielles par rapport aux* $a_1, \ldots, a_r$, *bornées supérieurement en valeur absolue par un nombre* c'.

En effet, si l'on pose

$$\vec{\beta}_n=\varphi_n[f_n(\vec{a})+\vec{v}_n],$$

le lemme II montre que

$$|\vec{a}-\vec{\beta}_n| \leqq r\psi_n |\vec{v}_n|.$$

Or

$$|G_{n+1,h}^{n,(k)}[f_n(\vec{a})+\vec{v}_n]-G_{n+1,h}^{n,(k)}[f_n(\vec{a})]|=|G_{n+1,h}^{n,(k)}[f_n(\vec{\beta}_n)]-G_{n+1,h}^{n,(k)}[f_n(\vec{a})]| \leqq rc' |\vec{a}-\vec{\beta}_n|$$

donc

$$|\mu_{n,h}^{k}-1| \leqq r^2cc'\psi_n.$$

Considérons le vecteur:

$$\vec{\omega}_{n+1}=\vec{a}_{n+1}+\vec{\gamma}_{n+1}-F_{n+1}^{n}(\vec{a}_n+\vec{\gamma}_n)=\vec{u}_{n+1}-\vec{\varepsilon}_{n+1}-F_{n+1}^{n}(\vec{u}_n-\vec{\varepsilon}_n)$$

$|\vec{\varepsilon}_n|$ étant borné, $\vec{u}_n-\vec{\varepsilon}_n$ sera dans U_n à partir d'un certain rang n, et d'après le théorème des accroissements finis on aura:

$$\vec{\omega}_{n+1}=-\vec{\eta}_{n+1}-\vec{\varepsilon}_{n+1}+\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_{n,k}F_{n+1}^{n,(k)}(\vec{u}_n)$$

où

$$\vec{\eta}_{n+1}=\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_{n,k}[F_{n+1}^{n,(k)}(\vec{u}_n)-F_{n+1}^{n,(k)}(\vec{u}_n-\vec{v}_n)], \qquad |\vec{v}_n| \leqq |\vec{\varepsilon}_n|.$$

Nous sommes donc dans les conditions II et on peut écrire:

$$\eta_{n+1,h}=\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_{n,k}[F_{n+1,h}^{n,(k)}(\vec{u}_n)](1-\mu_{n,h}^{k}) \tag{1}$$

avec

$$\lim_{n=\infty}(1-\mu_{n,h}^{k})=0.$$

Soit c_n la plus petite des deux quantités:

$$\frac{1}{(2+\varepsilon)\left[1+|F_{m+1}^{m,(1)}(\vec{u}_m)|+\ldots+|F_{m+1}^{m,(r)}(\vec{u}_m)|\right]}$$

pour $m=n$ et $n-1$, et $\varepsilon>0$ arbitrairement petit. Si pour $n>n_0$ on a $|\varepsilon_n|\leqq c_n$, alors $|\vec{\omega}_{n+1}+\vec{\eta}_{n+1}|\leqq\frac{1}{2+\varepsilon}$ pour $n>n_0$.

De plus $|\varepsilon_{m,h}F_{m+1,h}^{m,(k)}(\vec{u}_m)|$ sera borné, donc d'après (1) $\lim_{n=\infty}\vec{\eta}_{n+1}=0$ et à partir d'un certain rang $n_1>n_0$ $|\vec{\omega}_{n+1}|<\frac{1}{2}$.

Par suite pour $n>n_1$, le vecteur $\vec{a}_{n+1}$ est le vecteur le plus rapproché de $-\vec{\gamma}_{n+1}+F_{n+1}^{n}(\vec{a}_n+\vec{\gamma}_n)$. La suite E est donc entièrement déterminée pour tout $n>n_1$ par la donnée de la suite Γ et du vecteur initial $\vec{a}_{n_1}$.

D'autre part une suite E ne peut provenir que d'un seul point $\vec{a}$ de A. En effet si deux suites $\vec{u}_n=f_n(\vec{a})$ et $\vec{u}_n{}'=f_n(\vec{a}')$ donnent une même suite E à partir d'un certain rang n_2, on aura $|u_n-u_n'|\leqq 1$ pour $n\geqq n_2$, et le lemme II montre que $\vec{a}'=\vec{a}$.

THÉORÈME I. - *Soit S une suite $\vec{u}_n=f_n(\vec{a})$ vérifiant les conditions I et II et soit Γ une suite $(\vec{\gamma}_0, \vec{\gamma}_1,\ldots, \vec{\gamma}_n,\ldots)$ donnée d'avance. En posant $\vec{u}_n\equiv\vec{\gamma}_n+\vec{\varepsilon}_n$* (mod. 1), *l'ensemble des points $\vec{a}$ de A pour lesquels $|\vec{\varepsilon}_n|\leqq c_n$ est dénombrable lorsque c_n est la plus petite des deux quantités:*

$$\frac{1}{(2+\varepsilon)\left[1+\sum_{h=1}^{r}|F_{n+1}^{n,(h)}(\vec{u}_n)|\right]}$$

et

$$\frac{1}{(2+\varepsilon)\left[1+\sum_{h=1}^{r}|F_{n}^{n-1,(h)}(\vec{u}_{n-1})|\right]}$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit.

Ce théorème ne démontre pas l'existence de telles valeurs $\vec{a}$. Pour étudier cette question nous allons énoncer d'autres conditions qui reviennent à supposer plus rapide la croissance de $\vec{u}_n$ avec n. De façon précise, nous conserverons les conditions I et nous ajouterons les conditions suivantes:

CONDITIONS III: *$\vec{a}$ étant un point fixe de A, nous supposerons pour $n>m$*

$|F_{m,h}^{n,(k)}[f_n(\vec{a})]|\leqq\chi_{m,h}^{n,k}$ *où les séries* $\sum_{n=m+1}^{\infty}\chi_{m,h}^{n,k}$ *sont convergentes.*

Désignons par $\varphi_{n,h}^{(k)}(\vec{u}_n)$ la dérivée partielle de $\varphi_{n,h}(\vec{u}_n)$ par rapport à $u_{n,k}$ et par $f_{n,h}^{(k)}(\vec{a})$ celle de $f_{n,h}(\vec{a})$ par rapport à a_k.

Les conditions III entraînent que dans toute région $\overline{W}$ intérieure à A on a aussi $|\varphi^{(k)}_{n,h}[f_n(\vec{a})]| \leqq \psi_{n,h}$ *et que les séries* $\Psi_{m,h} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \psi_{n,h}$ *sont convergentes.*

En effet d'après la définition des fonctions $F^n_m(\vec{u_n})$ on a

$$F^{n,(k)}_{m,h}[f_n(\vec{a})] = \sum_{l=1}^{r} f^{(l)}_{m,h}(\vec{a}) \varphi^{(k)}_{n,l}[f_n(\vec{a})].$$

En faisant $m=0$ dans cette formule, on obtient pour $\varphi^{(h)}_{n,l}[f_n(\vec{a})]$, h étant fixe et k prenant les valeurs 1, 2,..... r, un système linéaire dont le déterminant est

$$\frac{D(f_{0,1};\ f_{0,2};\dots;\ f_{0,r})}{D(a_1,\ a_2,\dots,\ a_r)}.$$

Comme $f_0(\vec{a})$ est une application topologique de $\overline{A}$ sur $\overline{U}_0$, ce déterminant fonctionnel, qui est une fonction continue, est borné inférieurement en valeur absolue dans $\overline{W}$ par un nombre non nul; d'autre part $|F^{n,(k)}_{0,h}[f_n(\vec{a})]| \leqq \chi^{n,k}_{0,h}$ dans $\overline{W}$.

LEMME III. - *Soit $\vec{b}_0$ un point de U_n tel que $I\left[\varphi_n(\vec{b}_0), \frac{r}{2}|\vec{\Psi}_n|\right]$ soit dans A. Posons $\vec{b} = F^n_{n+1}(\vec{b}_0)$ et soit $\vec{b}_1$ un point tel que $|\vec{b}-\vec{b}_1| \leqq \frac{1}{2}$. $\vec{b}_1$ est dans U_{n+1} et $I\left[\varphi_{n+1}(\vec{b}_1), \frac{r}{2}|\vec{\Psi}_{n+1}|\right]$ est dans A.*

On a en effet $\varphi_{n+1}(\vec{b}) = \varphi_n(\vec{b}_0)$, et $I\left[\varphi_{n+1}(\vec{b}), \frac{r}{2}|\vec{\Psi}_n|\right]$ est dans A. Les dérivées partielles de φ_{n+1} étant en valeur absolue bornées par $|\vec{\psi}_{n+1}|$, le lemme I montre que $I\left(\vec{b}, \dfrac{r|\vec{\Psi}_n|}{2r|\vec{\psi}_{n+1}|}\right)$ est dans U_{n+1}; il en est de même à fortiori de $\overline{I}\left(\vec{b}, \frac{1}{2}\right)$. Donc $\vec{b}_1$ est dans U_{n+1}. De plus $|\varphi_{n+1}(\vec{b}_1) - \varphi_{n+1}(\vec{b})| \leqq \frac{r}{2}|\vec{\psi}_{n+1}|$ et par suite $I\left[\varphi_{n+1}(\vec{b}_1), \frac{r}{2}|\vec{\Psi}_{n+1}|\right]$ est contenu dans $I\left[\varphi_{n+1}(\vec{b}), \frac{r}{2}|\vec{\Psi}_n|\right]$, donc dans A.

Donnons nous un point quelconque $\vec{a}$ de A et un voisinage W de $\vec{a}$ tel que $\overline{W}$ soit dans A. Montrons que l'on peut trouver un indice n_0 et un point $\vec{a}_{n_0}$ tels que

1°) le point $\vec{b}_{n_0} = \vec{a}_{n_0} + \vec{\gamma}_{n_0}$ soit dans U_{n_0};

2°) $I\left[\varphi_{n_0}(\vec{b}_{n_0}), \frac{r}{2}|\vec{\Psi}_{n_0}|\right]$ soit dans W.

En effet, puisque $\vec{\Psi}_n$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, on pourra trouver un entier n_1 et un voisinage W' de $\vec{a}$ tels que, si $\vec{\beta}$ est un point de W', $I\left(\vec{\beta}, \frac{r}{2}|\vec{\Psi}_{n_1}|\right)$ soit dans W. Si $I(\vec{a}, \delta)$ est dans W' et si W_n' est le domaine transformé de W' par la transformation f_n, il résulte du lemme I que $I\left[f_n(\vec{a}), \dfrac{\delta}{r|\vec{\psi}_n|}\right]$ est dans W_n'.

On pourra prendre $n_0 > n_1$ assez grand pour que dans $I\left[\overrightarrow{f_{n_0}(a)}, \dfrac{\delta}{r\,|\overrightarrow{\psi_{n_0}}|}\right]$ il y ait un point $\overrightarrow{b_{n_0}}$.

Nous pouvons maintenant définir par récurrence une suite E: $\overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}, \ldots$ de la manière suivante:

Posons $\overrightarrow{b_n} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{\gamma_n}$ et supposons $\overrightarrow{a_n}$ déja défini de façon que $\overrightarrow{b_n}$ soit dans U_n et que $I\left[\varphi_n(\overrightarrow{b_n}), \frac{r}{2}\,|\overrightarrow{\Psi_n}|\right]$ soit dans A. Nous définirons alors $\overrightarrow{a_{n+1}}$ comme le vecteur dont les composantes sont les entiers les plus voisins des composantes correspondantes du vecteur $-\overrightarrow{\gamma_{n+1}} + F^n_{n+1}(\overrightarrow{b_n})$, ou de façon plus précise $\overrightarrow{a_{n+1}}$ sera défini par les r inégalités $-\frac{1}{2} < \omega_{n+1,h} \leqq \frac{1}{2}$. Il résulte du lemme III que les conditions seront encore remplies pour l'indice $n+1$ et que par suite la récurrence peut continuer. De plus, $\varphi_n(\overrightarrow{b_n})$ sera toujours dans W et comme

$$|\varphi_{n+1}(\overrightarrow{b_{n+1}}) - \varphi_n(\overrightarrow{b_n})| \leqq \frac{r}{2}\,|\overrightarrow{\psi_{n+1}}|,$$

$\varphi_n(\overrightarrow{b_n})$ tend vers une limite $\overrightarrow{a}$ de $\overline{W}$ quand n augmente indéfiniment.

Ayant ainsi déterminé une limite $\overrightarrow{a}$ correspondant à une suite E construite par le procédé précédent, on en déduit une suite S: $\overrightarrow{u_n} = f_n(\overrightarrow{a})$. Nous allons donner une limite supérieure de $|\overrightarrow{\varepsilon_m}|$ où

$$\overrightarrow{\varepsilon_m} = \overrightarrow{u_m} - (\overrightarrow{a_m} + \overrightarrow{\gamma_m}) = \overrightarrow{u_m} - \overrightarrow{b_m}.$$

Si l'on pose $\overrightarrow{\beta_n} = \varphi_n(\overrightarrow{b_n})$ on aura:

$$\overrightarrow{\varepsilon_m} = f_m(\overrightarrow{a}) - f_m(\overrightarrow{\beta_m}) = \sum_{n=m}^{\infty} [f_m(\overrightarrow{\beta_{n+1}}) - f_m(\overrightarrow{\beta_n})].$$

En effet, la fonction $f_m(\overrightarrow{a})$ étant continue, $f_m(\overrightarrow{\beta_n})$ tend vers $f_m(\overrightarrow{a})$ si n augmente indéfiniment. Or

$$\overrightarrow{b_{n+1}} = F^n_{n+1}(\overrightarrow{b_n}) + \overrightarrow{\omega_{n+1}}$$

et d'après la définition des fonctions F^n_m on aura:

$$\overrightarrow{\varepsilon_m} = \sum_{n=m}^{\infty} [F^{n+1}_m(\overrightarrow{b_{n+1}}) - F^{n+1}_m(\overrightarrow{b_{n+1}} - \overrightarrow{\omega_{n+1}})].$$

Pour chaque valeur de n, $I\left(\overrightarrow{b_n}, \frac{1}{2}\right)$ est dans W_n et l'on a:

$$|\varepsilon_{m,h}| \leqq \sum_{n=m}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{r} |\omega_{n+1,k}|\, \chi^{n+1,k}_{m,h}\right] \leqq \frac{1}{2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{r} \chi^{n,k}_{m,h}\right] = c'_{m,h}.$$

THÉORÈME II. - *Soit S une suite $\vec{u}_n = f_n(\vec{a})$ vérifiant les conditions I et III et soit Γ une suite $\vec{\gamma}_0, \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_n, \ldots$ arbitrairement donnée d'avance. Soit $\chi_{m,h}^{n,k}$ la borne supérieure de $|F_{m,h}^{n,(k)}[f_n(\vec{\beta})]|$ quand $\vec{\beta}$ est dans un voisinage W de $\vec{a}$ et posons $c'_{m,h} = \frac{1}{2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{r} \chi_{m,h}^{n,k}\right]$.*

1°) *Si $\overline{\lim_{m=\infty}} |\vec{c}'_m| < 1$, il existe dans A un ensemble dénombrable et partout dense de valeurs $\vec{a}$ pour lesquelles aucune des suites S_h n'est équirépartie* (mod. 1).

2°) *Si $\overline{\lim_{m=\infty}} |\vec{c}'_m| < \frac{1}{2}$, l'ensemble précédent des valeurs de $\vec{a}$ a la puissance du continu dans tout domaine W de A.*

3°) *Si $\overline{\lim_{m=\infty}} \vec{c}'_m = 0$, il existe dans A un ensemble dénombrable et partout dense de valeurs de $\vec{a}$ pour lesquelles les suites S_h ont asymptotiquement des répartitions Γ_h* (mod. 1) *arbitrairement données d'avance.*

Pour démontrer 1°) il suffit de considérer les suites Γ_h: 0, 0,...., 0,..... L'infinité dénombrable des suites E que l'on peut alors construire par le procédé indiqué nous donnera une infinité dénombrable de valeurs de $\vec{a}$ dans un voisinage arbitrairement petit de tout point de A. Les suites S_h correspondantes seront telles que $u_{n,h} \equiv \varepsilon_{n,h}$ (mod. 1) avec $|\varepsilon_{n,h}| < \frac{1}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain indice, et l'équirépartition (mod. 1) ne peut avoir lieu pour aucune des suites S_h.

On considérera de même pour 2°) l'ensemble ayant la puissance du continu des suites Γ_h pour lesquelles tous les $\gamma_{n,h}$ sont en valeur absolue égaux à $\frac{1}{4}$. Si $\vec{u}_n \equiv \vec{\delta}_n$ (mod. 1), on aura pour les suites S correspondantes $\varepsilon < |\vec{\delta}_n| < \frac{1}{2} - \varepsilon$ à partir d'un certain indice.

Etude d'une suite S donnée. - Soit une suite S de fonctions $\vec{u}_n = f_n(\vec{a})$. Nous allons montrer comment *on peut déduire toute l'étude de la suite S de celle des dérivées partielles des fonctions $\vec{u}_{n+1} = \vec{F}_{n+1}^n(\vec{u}_n)$.*

Posons

$$d_n = \frac{D(f_{n,1};\ f_{n,2};\ldots;\ f_{n,r})}{D(a_1,\ a_2,\ldots,\ a_r)} \quad \text{et} \quad D_{n+1} = \frac{D(F_{n+1,1}^n;\ F_{n+1,2}^n;\ldots;\ F_{n+1,r}^n)}{D(u_{n,1};\ u_{n,2};\ldots;\ u_{n,r})}.$$

La relation $f_{n+1}(\vec{a}) = F_{n+1}^n[f_n(\vec{a})]$ montre que l'on a

$$d_{n+1} = D_{n+1} d_n.$$

Si dans un domaine A tous les d_n sont différents de 0, il en sera de même des D_n, et réciproquement quand d_0 n'est pas nul, car

$$d_n = d_0 \prod_{m=1}^{n} D_m.$$

En particulier si l'on prend pour paramètres les valeurs initiales $u_{0,1}$; $u_{0,2}$;....; $u_{0,r}$ on a $d_0=1$ et tous les d_n sont différents de 0 si, quel que soit m, il en est ainsi des D_m.

Soient $x_{n,h}$ des quantités vérifiant le système récurrent linéaire

$$(2) \qquad x_{n-1,h} - \sum_{k=1}^{r} F_{n+1,k}^{n,(h)}(\overrightarrow{u_n}) x_{n,k} = 0, \qquad h=1,\ 2,\ldots,\ r.$$

Considérons les r relations:

$$d\omega_{n+1,h} \equiv du_{n+1,h} - \sum_{k=1}^{r} F_{n+1,h}^{n,(k)}(\overrightarrow{u_n}) du_{n,k} = 0.$$

En vertu du système (2) la somme

$$0 = \sum_{l=m}^{n} \sum_{h=1}^{r} (x_{l,h} d\omega_{l+1,h})$$

fournit la relation:

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{r} du_{m,k} \sum_{h=1}^{r} [x_{m,h} F_{m+1,h}^{m,(k)}(\overrightarrow{u_m})] = \sum_{h=1}^{r} x_{n-1,h} du_{n,h}.$$

Nous pouvons donner aux coefficients des $du_{m,k}$ des valeurs arbitraires. En effet le déterminant des coefficients des $x_{m,h}$ est D_{m+1}, qui, comme nous l'avons vu, est différent de 0 dans A. En prenant des valeurs initiales $x_{m,h}$ convenables nous pouvons réduire en particulier le premier membre à $du_{m,k}$ et nous avons alors:

$$du_{m,k} = \sum_{h=1}^{r} x_{n-1,h} du_{n,h}.$$

Or d'après la définition des fonctions $F_{m,k}^{n}(\overrightarrow{u_n})$ on a aussi:

$$du_{m,k} = \sum_{h=1}^{r} F_{m,k}^{n,(h)}(\overrightarrow{u_n}) du_{n,h}.$$

La comparaison de ces deux égalités montre que les fonctions $F_{m,k}^{n,(h)}(\overrightarrow{u_n})$ sont des solutions particulières du système (2).

La différentiation des égalités $\overrightarrow{a} = \varphi_m(\overrightarrow{u_m}) = \varphi_n(\overrightarrow{u_n})$ montre de même que les fonctions $\varphi_{n,k}^{(h)}(\overrightarrow{u_n})$ sont des solutions particulières du système (2).

Application à une suite S dépendant d'un seul paramètre. - Soit $u_n = f_n(a)$ une suite S. Nous désignerons par $f_n'(a)$ la dérivée de $f_n(a)$ par rapport à a. Supposons les conditions I et III remplies dans un intervalle A. Le système récurrent (2) se réduit ici à

$$x_n \frac{f'_{n+1}(a)}{f_n'(a)} - x_{n-1} = 0.$$

La solution de ce système qui donne $F_m^{n,(1)}(u_n)$ est $x_n = \frac{f'_m(a)}{f'_{n+1}(a)}$.

Supposons alors que dans A:

$$f'_{n+1}(a) \geqq k_n f_n'(a) \quad \text{et que} \quad k_n \geqq 1 + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0.$$

Pour toute suite E définie par les inégalités:

$$-\frac{1}{2} < a_{n+1} + \gamma_{n+1} - f_{n+1}[\varphi_n(a_n + \gamma_n)] \leqq \frac{1}{2}$$

on a $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(a_n + \gamma_n) = a$ et pour la suite S correspondante on a

$$|\varepsilon_n| \leqq c_n' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_n k_{n+1}} + \frac{1}{k_n k_{n+1} k_{n+2}} + \ldots\right].$$

Si alors $k_n \geqq 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ et arbitrairement petit, on voit que $\overline{\lim\limits_{n=\infty}}\, c_n' \leqq \frac{1}{2(1+\varepsilon)}$;

Si $k_n \geqq 3 + \varepsilon$, $\qquad \overline{\lim\limits_{n=\infty}}\, c_n' \leqq \frac{1}{2(2+\varepsilon)}$;

Si k_n augmente indéfiniment avec n, $\lim\limits_{n=\infty} c_n' = 0$.

On en déduit en particulier les résultats annoncés sur la suite $u_n = \lambda a^n$.

Suites S dépendant linéairement des paramètres. - Un cas particulièrement simple se présente lorsque $\vec{u_n}$ dépend linéairement des paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$. En effet la dérivation par rapport à ces paramètres les élimine et ils ne figurent plus dans l'énoncé des conditions I, 3°), II et III. Les conditions I, 1°) et 2°) peuvent être remplacées par la condition $d_n \neq 0$. De plus dans l'énoncé du théorème II (p. 11) on pourra remplacer ε par 0. Le domaine A est tout l'espace R^r des paramètres. Le cas $u_n = af(n)$ a déjà été étudié par un certain nombre d'auteurs ([8]).

([8]) Voir notamment: FATOU, Acta math., 30 (1906), pp. 335-400. - KHINTCHINE, Rend. Circ. mat. Palermo, 50 (1926), pp. 170-195. - SKOLEM, Math. Annalen, 95 (1926), pp. 2-68.

Suites S vérifiant une relation de récurrence d'ordre r. - Dans ce qui suit et dans les chapitres ultérieurs nous nous bornerons à l'étude d'une suite S $u_n=f_n(a_1, a_2,\ldots, a_r)=f_n(\overrightarrow{a})$. Nous nous ramenons au cas précédent en prenant pour $\overrightarrow{u_n}$ le vecteur de composantes $u_n, u_{n+1},\ldots, u_{n+r-1}$. Les suites Γ et E sont alors uniques soit $\gamma_0, \gamma_1,\ldots, \gamma_n,\ldots$ et $a_0, a_1,\ldots, a_n,\ldots$. $\gamma_n, \gamma_{n+1},\ldots, \gamma_{n+r-1}$ seront les composantes de $\overrightarrow{\gamma_n}$ et $a_n, a_{n+1},\ldots, a_{n+r-1}$ celles de $\overrightarrow{a_n}$. Le système $\overrightarrow{u_{n+1}}=F^n_{n+1}(\overrightarrow{u_n})$ se réduit à la seule fonction $u_{n+r}=F^n_{n+1,r}(\overrightarrow{u_n})$.

Dorénavant nous poserons $F^n_{n+1,r}(\overrightarrow{u_n})\equiv F_n(\overrightarrow{u_n})$ et $F^{n,(h)}_{n+1,r}(\overrightarrow{u_n})\equiv F^{(h)}_n(\overrightarrow{u_n})$. Les autres fonctions $F^n_{n+1,l}(\overrightarrow{u_n})$ sont identiques à u_{n+l} pour $l=1, 2,\ldots, r-1$. Avec ces valeurs des fonctions $F^n_{n+1,h}(\overrightarrow{u_n})$ on remarquera que les composantes $\omega_{n+1,h}$ et $\eta_{n+1,h}$ de $\overrightarrow{\omega_{n+1}}$ et de $\overrightarrow{\eta_{n+1}}$ sont nulles si $h=1, 2,\ldots, r-1$. Nous poserons:

$$\omega_{n+1,r}=\omega_{n+r} \quad \text{et} \quad \eta_{n+1,r}=\eta_{n+r}.$$

C'est ainsi que c_n sera la plus petite des valeurs de

$$\frac{1}{(2+\varepsilon)\left[1+|F^{(1)}_m(\overrightarrow{u_m})|+\ldots+|F^{(r)}_m(\overrightarrow{u_m})|\right]} \quad \text{pour} \quad m=n, n-1,\ldots, n-r$$

et c'est cette valeur qu'il faut substituer dans l'énoncé du théorème II.

On pourra démontrer le lemme III en prenant le domaine $I\left[\varphi_n(\overrightarrow{b_0}), \frac{1}{2}\overrightarrow{\Psi_n}\right]$ au lieu de $I\left[\varphi_n(\overrightarrow{b_0}), \frac{r}{2}|\overrightarrow{\Psi_n}|\right]$. En effet les $r-1$ premières composantes de $\overrightarrow{b}$ et de $\overrightarrow{b_1}$ sont égales. On montrera alors, en raisonnant comme dans la démonstration du lemme I, que l'intervalle $I(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d})$, où $\overrightarrow{d}$ a pour composantes $0, 0,\ldots, 0, \frac{1}{2}$. est dans U_{n+1}. Donc $\overrightarrow{b_1}$ est dans U_{n+1} et $I\left[\varphi_{n+1}(\overrightarrow{b_1}), \frac{1}{2}\overrightarrow{\Psi_{n+1}}\right]$ est dans A.

Il en résulte aussi que dans les conditions III seules les dérivées $F^{n,(r)}_{m,1}(\overrightarrow{u_n})$ doivent être bornées en valeur absolue par une quantité χ^n_m, terme général d'une série convergente. D'ailleurs

$$F^n_{m,r}(\overrightarrow{u_n})\equiv F^n_{m+1,r-1}(\overrightarrow{u_n})\equiv\ldots\equiv F^n_{m+r-1,1}(\overrightarrow{u_n})=u_{m+r-1}.$$

Dans le théorème II on prendra $c'_m=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}\chi^n_m$.

Enfin si l'on pose $x_{n,r}=x_n$ le système récurrent (2) devient:

$$(2') \qquad x_n-x_{n+1}F^{(r)}_{n+1}(\overrightarrow{u_{n+1}})-x_{n+2}F^{(r-1)}_{n+2}(\overrightarrow{u_{n+2}})-\ldots-x_{n+r}F^{(1)}_{n+r}(\overrightarrow{u_{n+r}})=0.$$

$F^{n,(r)}_{m,1}(\overrightarrow{u_n})$ est la solution de cette relation de récurrence qui est donnée par les conditions initiales:

$$
\begin{aligned}
x_m F_m^{(1)}(\overrightarrow{u_m}) &= 1 \\
x_m F_m^{(2)}(\overrightarrow{u_m}) + x_{m+1} F_{m+1}^{(1)}(\overrightarrow{u_{m+1}}) &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
x_m F_m^{(r)}(\overrightarrow{u_m}) + x_{m+1} F_{m+1}^{(r-1)}(\overrightarrow{u_{m+1}}) + \dots + x_{m+r-1} F_{m+r-1}^{(1)}(\overrightarrow{u_{m+r-1}}) &= 0.
\end{aligned}
$$

La relation (3) est remplacée par

$$
\begin{aligned}
(3')\qquad & x_m F_m^{(1)} du_m + (x_m F_m^{(2)} + x_{m+1} F_{m+1}^{(1)}) du_{m+1} + \dots + \\
& + (x_m F_m^{(r)} + x_{m+1} F_{m+1}^{(r-1)} + \dots + x_{m+r-1} F_{m+r-1}^{(1)}) du_{m+r-1} = \\
& = (x_{n-r} - x_{n-r+1} F_{n-r+1}^{(r)} - \dots - x_{n-1} F_{n-1}^{(2)}) du_n + \dots + \\
& + (x_{n-2} - x_{n-1} F_{n-1}^{(r)}) du_{n+r-2} + x_{n-1} du_{n+r-1}.
\end{aligned}
$$

Cette relation nous indique les valeurs initiales à prendre dans chaque cas particulier.

Il est facile de voir que les mêmes méthodes donnent des résultats analogues dans l'étude de suites S par rapport à un ensemble discret $\mathcal{E}$ ayant les propriétés suivantes :

La distance de deux éléments de $\mathcal{E}$ a une borne inférieure non nulle et dans le voisinage de chaque élément de $\mathcal{E}$ il y a au moins un autre élément dont la distance au premier ne dépasse pas un nombre fixe. Ces conditions sont réalisées en particulier si $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points dont les coordonnées sont les entiers d'un corps quadratique à éléments imaginaires ; ceci permet d'étudier des suites S à éléments complexes par rapport aux entiers d'un tel corps.

CHAPITRE II.

Répartition modulo 1 d'une suite dont les éléments sont liés par une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

Généralités sur les relations de récurrence linéaires à coefficients constants. - Soit u_n le terme général d'une suite S réelle vérifiant la relation de récurrence à coefficients β_h constants et réels, β_r étant essentiellement un nombre non nul :

$$(1)\qquad u_{n+r} + \beta_1 u_{n+r-1} + \dots + \beta_r u_n = 0\,.$$

Désignons par

$$P(z) \equiv z^r + \beta_1 z^{r-1} + \dots + \beta_r$$

le polynôme caractéristique de la récurrence (1) et posons :

$$P^*(z) \equiv z^r P\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \beta_r z^r + \beta_{r-1} z^{r-1} + \dots + \beta_1 z + 1.$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ les racines réelles ou complexes de $P(z) = 0$. Rappelons que :

La condition nécessaire et suffisante pour que u_n soit solution de la récurrence (1) *c'est que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ *représente autour de* $z=0$ *le développement d'une fraction rationnelle* $\frac{R(z)}{P^*(z)}$.

La décomposition en éléments simples de $\frac{R(z)}{P^*(z)}$ donne:

$$u_n = \alpha_1^n \lambda_1(n) + \alpha_2^n \lambda_2(n) + \dots + \alpha_s^n \lambda_s(n) \tag{2}$$

$\lambda_k(n)$ étant un polynôme en n dont le degré est inférieur à l'ordre de multiplicité de la racine α_k; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ étant les racines distinctes de $P(z)=0$.

Nous supposons d'autre part les modules de toutes les racines de $P(z)=0$ supérieures ou égales à 1; en effet si $|\alpha_k|<1$, $\alpha_k^n \lambda_k(n)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, et sa répartition (mod. 1) est connue.

LEMME. - *Si l'on pose*

$$\frac{\beta_r}{P(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$$

on a

$$v_n = \sum_1^r \frac{1}{\alpha_{h_1} \alpha_{h_2} \dots \alpha_{h_n}}.$$

Le signe $\sum_1^r$ *exprime que tous les indices* $h_1, h_2, \dots, h_n$ *parcourent les valeurs* 1, 2,.... r *avec* $h_1 \geqq h_2 \geqq \dots \geqq h_n$.

Le lemme est vrai pour $r=1$; en effet $P(z)=z+\beta_1$ étant du premier degré, on a

$$\beta_1 = -\alpha_1 \quad \text{et} \quad \frac{\beta_1}{z+\beta_1} = \frac{1}{1-\frac{z}{\alpha_1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1^n} z^n.$$

Supposons le lemme vrai si $P(z)$ est de degré r et soit $\alpha_{r+1} \neq 0$ un nombre quelconque. Le terme constant du polynôme $(z-\alpha_{r+1})P(z)$ est alors $-\beta_r \alpha_{r+1}$ et si l'on pose:

$$\frac{-\beta_r \alpha_{r+1}}{(z-\alpha_{r+1})P(z)} = \frac{\beta_r}{P(z)} \frac{1}{\left(1-\frac{z}{\alpha_{r+1}}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n,$$

on aura

$$w_n = v_n + \frac{1}{\alpha_{r+1}} v_{n-1} + \dots + \frac{1}{\alpha_{r+1}^n} v_0 = \sum_1^{r+1} \frac{1}{\alpha_{h_1} \alpha_{h_2} \dots \alpha_{h_n}}.$$

Le lemme est donc vrai pour un polynôme de degré $r+1$. Il montre en particulier que

$$|v_n| \leqq \sum_1^r \frac{1}{|\alpha_{h_1}| |\alpha_{h_2}| \dots |\alpha_{h_n}|}$$

et que, si $|z|$ est inférieur à la plus petite des quantités $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$,...., $|\alpha_r|$, on a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n z^n| \leqq \frac{|\beta_r|}{(|\alpha_1|-|z|)(|\alpha_2|-|z|)\dots(|\alpha_r|-|z|)}.$$

Nous allons nous placer successivement dans les cas suivants:

1°) Les coefficients de la relation (1) sont fixes, les coefficients des polynômes $\lambda_k(n)$ étant les paramètres.

2°) Les coefficients de la relation (1) sont les paramètres, les racines α_1, α_2,...., α_r étant toutes distinctes et les nombres λ_1, λ_2,...., λ_r étant fixes.

3°) Les deux groupes précédents de paramètres sont variables en même temps.

1°) **La récurrence est fixe.** - La formule (2) nous montre que u_n dépend linéairement des coefficients des polynômes $\lambda_k(n)$. La relation $u_{n+r}=F_n(\overrightarrow{u_n})$ éliminant les paramètres est la relation de récurrence (1) elle-même et l'on a par suite:

$$F_n^{(h)}(\overrightarrow{u_n}) = -\beta_{r-h+1}$$

En particulier $F_n^{(1)}(\overrightarrow{u_n}) = -\beta_r \neq 0$, et comme d'autre part le déterminant fonctionnel $d_0 \neq 0$, il en résulte que $d_n \neq 0$. La relation de récurrence I (2') devient ici:

(3) $$\beta_r x_{n+r} + \beta_{r-1} x_{n+r-1} + \dots + \beta_1 x_{n+1} + x_n = 0.$$

C'est une relation linéaire à coefficients constants et son équation caractéristique est $P^*(z)=0$. Les racines en sont $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_r}$, donc toutes les séries $\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|$ sont convergentes et les conditions I, II et III sont remplies.

Nous aurons ici:

$$\omega_{n+r} = a_{n+r} + \gamma_{n+r} + \beta_1(a_{n+r-1} + \gamma_{n+r-1}) + \dots + \beta_r(a_n + \gamma_n).$$

On pourra prendre pour c_n la quantité fixe:

$$\frac{1}{2[1+|\beta_1|+\dots+|\beta_r|]}$$

ou aussi la quantité plus petite:

$$\frac{1}{2\prod_{h=0}^{r}(|\alpha_h|+1)}.$$

La solution x_n de (3) qui est égale à $F_{m,1}^{n,(r)}$ est déterminée par les conditions initiales:

$$\begin{gathered} -x_m\beta_r = 1 \\ x_m\beta_{r-1} + {}_{m+1}\beta_r = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m\beta_1 + {}_{m+1}\beta_2 + \dots + x_{m+r-1}\beta_r = 0. \end{gathered}$$

La série $\sum_{n=m}^{\infty} x_m z^{n-m}$ représente donc le développement de la fraction rationnelle $\frac{-1}{P(z)}$ et en vertu du lemme

$$c'_m = \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{\infty} |x_n| \leqq \frac{1}{2 \prod_{h=1}^{r} (|a_h| - 1)}.$$

Si toutes les racines de $P(z)=0$ sont réelles et positives on peut d'ailleurs remplacer cette valeur par

$$\frac{1}{2|P(1)|} = \frac{1}{2|[1+\beta_1+ \ldots + \beta_r]|}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. - *Soit* $u_n = a_1^n \lambda_1(n) + a_2^n \lambda_2(n) + \ldots + a_s^n \lambda_s(n)$ *le terme général d'une suite* S *et soit* Γ *une suite* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots$ *donnée. Posons* $u_n \equiv \gamma_n + \varepsilon_n$ (mod. 1).

L'ensemble des valeurs des coefficients des polynômes $\lambda_k(n)$ *est dénombrable lorsque l'on a à partir d'un certain indice:*

$$|\varepsilon_n| < \frac{1}{2 \prod_{h=1}^{r} (|a_h| + 1)}.$$

D'autre part dans tout domaine de l'espace de ces coefficients il existe des valeurs telles que l'on ait à partir d'un certain indice:

$$|\varepsilon_n| \leqq \frac{1}{2 \prod_{h=1}^{r} (|a_h| - 1)}.$$

Cette dernière condition n'a d'intérêt que si $\prod_{h=1}^{r} (|a_h| - 1) > 1$. Il faut donc que le module d'au moins une des quantités a_h dépasse 2.

Application à la suite $u_n = \lambda a^n$. Dans le cas de la relation de récurrence $u_{n+1} - a u_n = 0$, $a > 1$, on montre ainsi que les valeurs de λ sont en infinité dénombrable au plus si $|\varepsilon_n| < \frac{1}{2(a+1)}$ à partir d'un certain indice; tandis qu'il y en a toujours pour lesquelles $|\varepsilon_n| \leqq \frac{1}{2(a-1)}$ à partir d'un certain indice. Si a est un entier rationnel a, l'étude (mod. 1) de λa^n revient à celle du développement en base a du nombre λ. Les résultats précédents sont alors vérifiés avec les limitations plus précises $|\varepsilon_n| < \frac{1}{2a}$ dans le premier cas et $|\varepsilon_n| \leqq \frac{1}{2a}$ dans le deuxième cas.

Remarquons encore que si la suite Γ est la suite 0, 0,...., 0,.... l'inégalité $|\varepsilon_n| < \frac{1}{2a}$ à partir d'un certain indice entraîne $\varepsilon_n = 0$ à partir de ce même indice; et λ est un nombre rationnel dont le dénominateur ne contient que les facteurs premiers de a. Nous verrons plus loin (chap., III p. 32) une propriété analogue pour tout nombre α algébrique.

2°) **Les racines sont variables et distinctes.** - Nous allons nous borner à l'étude de la suite S définie par

$$u_n = \lambda_1 a_1^n + \lambda_2 a_2^n + \dots + \lambda_r a_r^n$$

les $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ étant des constantes indépendantes de n. Le déterminant fonctionnel d_n est égal à

$$(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r) n(n+1) \dots (n+r-1)(a_1 a_2 \dots a_r)^{n-1} \prod_{\substack{1 \\ h \neq k}}^{r} (a_h - a_k)$$

il est donc différent de 0 si aucun λ_k n'est nul et si tous les a_h sont différents. Nous prendrons alors pour région $\overline{A}$ une région complètement intérieure à l'un des domaines limités par les conditions $a_h = a_k$ et $|a_h| \geqq 1$. Dans une telle région $\overline{A}$ les conditions I 1°) et 2°) sont remplies. En un point de $\overline{A}$ nous pouvons encore écrire:

(1) $$u_{n+r} + \beta_1 u_{n+r-1} + \dots + \beta_r u_n = 0$$

mais les coefficients β_k varient avec le point choisi de $\overline{A}$, et on connaît leur expression en fonction de $a_1, a_2, \dots, a_r$.

Pour calculer les valeurs des fonctions $F_n^{(h)}$ nous nous servirons de l'identité:

$$du_{n+r} - F_n^{(r)} du_{n+r-1} - \dots - F_n^{(1)} du_n = 0.$$

Nous obtenons en effet une égalité de cette forme en éliminant $\lambda_1 da_1, \lambda_2 da_2, \dots, \lambda_r da_r$ entre les expressions de $du_n, du_{n+1}, \dots, du_{n+r}$. L'élimination donne:

$$\begin{vmatrix} du_n & n a_1^{n-1} & \dots & n a_r^{n-1} \\ du_{n+1} & (n+1) a_1^n & \dots & (n+1) a_r^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ du_{n+r} & (n+r) a_1^{n+r-1} & \dots & (n+r) a_r^{n+r-1} \end{vmatrix} = 0.$$

En multipliant les éléments de la $(l+1)^{\text{ème}}$ ligne par $\frac{\beta_{r-l}}{n+l}$ pour $l = 0, 1, \dots, r$ $(\beta_0 = 1)$, la somme des éléments des r dernières colonnes est nulle, il en est donc de même des éléments de la première colonne, et nous en déduisons:

$$F_n^{(h+1)} = -\frac{n+r}{n+h} \beta_{r-h}.$$

La relation de récurrence I (2′) peut donc s'écrire ici

$$(4) \qquad (n+r)\beta_r x_n + (n+r-1)\beta_{r-1}x_{n-1} + \dots + (n+1)\beta_1 x_{n-r+1} + n x_{n-r} = 0.$$

La relation (4) montre que l'expression $y_n = x_n(n+r)$ vérifie une relation de récurrence à coefficients constants pour un point donné de $\bar{A}$, et l'équation caractéristique en est $P^*(z)=0$. Donc dans $\bar{A}$, $|x_n|$ est borné par le terme général d'une série convergente et les conditions I 3°) et III sont remplies. Enfin la formule

$$\frac{1}{F_n^{(h+1)}} = -\frac{n+h}{n+r}\frac{1}{\beta_{r-h}}$$

montre que cette expression a des dérivées partielles par rapport aux $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ bornées dans $\bar{A}$; les conditions II sont aussi remplies.

Nous pouvons donc prendre ici :

$$c_n = \frac{1}{(2+\varepsilon)\left[1+\frac{n}{n-1}|\beta_1| + \dots + \frac{n}{n-r}|\beta_r|\right]}$$

ou encore la quantité plus petite

$$c_n = \frac{n-r}{(2+\varepsilon)n}\frac{1}{\prod\limits_{h=1}^{r}(|\alpha_h|+1)}, \qquad \varepsilon > 0.$$

La solution de (4) égale à $F_{m,1}^{n,(r)}$ est déterminée par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x_m \frac{m+r}{m}\beta_r &= -1 \\ x_m(m+r)\beta_{r-1} + x_{m+1}(m+r+1)\beta_r &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ x_m(m+r)\beta_1 + \dots + x_{m+r-1}(m+2r-1)\beta_r &= 0. \end{aligned}$$

La série $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n z^{n-m}$ représente donc autour de $z=0$ le développement de la fraction rationnelle $\frac{-m}{P(z)}$. Si alors $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_r$ sont les bornes inférieures de $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_r|$ dans un voisinage W_m du système $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ on voit que dans W_m

$$\sum_{n=m}^{\infty}|y_n| \leqq \frac{m}{\prod\limits_{h=1}^{r}(\bar{\alpha}_h - 1)}$$

et par suite

$$\sum_{n=m}^{\infty}|x_m| \leqq \frac{m}{(m+r)\prod\limits_{h=1}^{r}(\bar{\alpha}_h - 1)} < \frac{1}{\prod\limits_{h=1}^{r}(\bar{\alpha}_h - 1)}.$$

Or W_m peut être pris aussi petit que l'on veut, si l'on prend m assez grand. On peut donc prendre:

$$c_n' = \frac{1+\varepsilon}{2\prod_{h=1}^{r}(|a_h|-1)}$$

ε étant une quantité fixe positive.

Nous résumerons ces résultats dans l'énoncé suivant:

THÉORÈME. - *Soit* $u_n = \lambda_1 a_1^n + \lambda_2 a_2^n + ... + \lambda_r a_r^n$ *le terme général d'une suite* S *et soit* Γ *une suite* $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n, ...$ *donnée. Posons* $u_n \equiv \gamma_n + \varepsilon_n$ (mod. 1). *Soit* A *une région complètement intérieure à l'un des domaines limités par les conditions* $a_h = a_k$ $(h \neq k)$ *et* $|a_h| \geqq 1$.

L'ensemble des valeurs des nombres $a_1, a_2, ..., a_r$ *est dénombrable lorsque l'on a à partir d'un certain indice:*

$$|\varepsilon_n| < \frac{n-r}{(2+\varepsilon)n} \, \frac{1}{\prod_{h=1}^{r}(|a_h|+1)}.$$

D'autre part dans tout domaine de A *il existe des valeurs de* $a_1, a_2, ..., a_r$ *telles que l'on ait à partir d'un certain indice*

$$|\varepsilon_n| < \frac{1+\varepsilon}{2\prod_{h=1}^{r}(|a_h|-1)}.$$

On traiterait de façon analogue les cas où à la place des constantes λ_h on aurait des polynômes $\lambda_h(n)$.

3°) **Les coefficients des polynômes $\lambda_k(n)$ et les racines $a_1, a_2, ..., a_r$ sont variables.** - Remarquons d'abord que les $2r$ valeurs initiales $u_0, u_1, ..., u_{2r-1}$ de la suite S déterminent les racines $a_1, a_2, ..., a_s$ et les polynômes $\lambda_k(n)$. En effet en écrivant la relation de récurrence (1) pour $n=0, 1, ..., r-1$ on obtient r équations linéaires pour les coefficients β_h de $P(z)$. Si nous supposons qu'il n'y a entre les valeurs $u_0, u_1, ..., u_{2r-1}$ aucune relation de récurrence d'ordre inférieur à r, le déterminant des coefficients des β_h est différent de 0. Ayant ainsi l'équation $P(z)=0$, nous en déduisons les racines a_k et leur ordre de multiplicité, donc le degré des polynômes $\lambda_k(n)$. Le système linéaire donnant les coefficients de ces polynômes a un déterminant non nul. Nous prendrons alors ces valeurs $u_0, u_1, ..., u_{2r-1}$ pour paramètres.

La relation qui exprime que la suite S vérifie une relation de récurrence d'ordre r s'écrit:

$$\Phi_n(u_n, u_{n+1}, ..., u_{n+2r}) \equiv \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & .... & u_{n+r} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & .... & u_{n+r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n+r} & u_{n+r+1} & .... & u_{n+2r} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous désignons par $\Phi_n^{(l)}$ la dérivée partielle de Φ_n par rapport à u_{n+l}.

Soit $\overline{U}$ une région de l'espace des paramètres $u_0, u_1, \ldots, u_{2r-1}$ complètement intérieure au domaine limité par les conditions qui expriment que $|\alpha_1|>1$, $|\alpha_2|>1, \ldots, |\alpha_r|>1$. Pour un point de $\overline{U}$, $\Phi_0^{(2r)} \neq 0$, ce que l'on voit facilement en prenant la forme (2) pour u_n. D'autre part $|\beta_r|>1>0$ et par suite

$$|\Phi_n^{(2r)}| = |\beta_r|^n |\Phi_0^{(2r)}| \neq 0.$$

La relation $\Phi_n(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+2r})=0$ peut donc s'écrire

$$u_{n+2r} - F_n(u_n, \ldots, u_{n+2r-1}) = 0$$

le déterminant figurant au dénominateur de F_n étant $\Phi_n^{(2r)} \neq 0$.

Nous désignerons encore par $F_n^{(h)}$ la dérivée partielle de F_n par rapport à u_{n+h}, $(h=0, 1, \ldots, 2r-1)$. Pour le calcul de $F_n^{(h)}$ nous utiliserons la relation $\Phi_n^{(l)} + F_n^{(l+1)} \Phi_n^{(2r)} = 0$. Les dérivées partielles $\Phi_n^{(l)}$ sont les sommes des mineurs du déterminant Φ_n, obtenus en supprimant la $(p+1)^{\text{ème}}$ ligne et la $(q+1)^{\text{ème}}$ colonne, avec $p+q=l$. Or, en vertu de la relation (1), un tel mineur vaut $(-1)^{p+q} \beta_{r-p} \beta_{r-q} \Phi_n^{(2r)}$. Donc, comme $\Phi_n^{(2r)} \neq 0$,

$$F_n^{(l+1)} = -\sum_{p+q=l} \beta_{r-p} \beta_{r-q}.$$

En remarquant qu'avec les paramètres choisis on a

$$d_n = \prod_{m=0}^{n-1} F_m^{(1)} = (-1)^n \beta_r^{2n} \neq 0$$

on voit facilement que les conditions I 1°) et 2°) sont remplies.

Pour les autres conditions nous allons encore former la relation de récurrence I (2′) qui nous donne ici:

$$x_n + 2\beta_1 x_{n+1} + \ldots + x_{n+l} \sum_{p+q=l} \beta_p \beta_q + \ldots + x_{n+2r} \beta_r^2 = 0. \tag{5}$$

C'est une relation de récurrence à coefficients constants quand on fixe les paramètres, et son équation caractéristique est $[P^*(z)]^2=0$. Pour tout point de $\overline{U}$, $|x_n|$ est borné par le terme général d'une série convergente et par suite les conditions I 3°) et III sont remplies. Enfin $\frac{1}{F_n^{(l)}}$ possède des dérivées partielles par rapport aux paramètres, bornées en valeur absolue dans $\overline{U}$, car il en est ainsi par rapport aux β_h; les conditions II sont donc remplies.

On détermine les suites d'entiers E par les inégalités

$$-\frac{1}{2} < a_{n+2r} + \gamma_{n+2r} - F_n(a_n + \gamma_n, \ldots, a_{n+2r-1} + \gamma_{n+2r-1}) \leq \frac{1}{2}$$

les valeurs initiales $a_0, a_1, \ldots, a_{2r-1}$ étant choisies dans le domaine défini au chapitre I. Nous verrons d'ailleurs au chapitre IV la détermination effective d'un tel domaine dans le cas particulier d'une récurrence d'ordre 1.

Ayant une suite E, la résolution du système

$$\begin{aligned} a_{n+r}+\gamma_{n+r}+\beta_{1,n}(a_{n+r-1}+\gamma_{n+r-1})+\ldots.+\beta_{r,n}(a_n+\gamma_n)&=0\\ a_{n+r+1}+\gamma_{n+r+1}+\beta_{1,n}(a_{n+r}+\gamma_{n+r})+\ldots.+\beta_{r,n}(a_{n+1}+\gamma_{n+1})&=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{n+2r-1}+\gamma_{n+2r-1}+\beta_{1,n}(a_{n+2r-2}+\gamma_{n+2r-2})+\ldots.+\beta_{r,n}(a_{n+r}+\gamma_{n+r})&=0 \end{aligned}$$

nous donne des nombres $\beta_{h,n}$ tels que $\lim\limits_{n=\infty}\beta_{h,n}=\beta_h$, d'où le polynôme

$$P(z)\equiv z^r+\beta_1 z^{r-1}+\ldots.+\beta_r=0$$

et les racines $\alpha_1, \alpha_2,\ldots., \alpha_s$ avec leur ordre de multiplicité. Les coefficients des polynômes $\lambda_k(n)$ sont donnés par la résolution du système linéaire:

$$\begin{aligned} a_n+\gamma_n&=\alpha_1^n\lambda_1(n)+\alpha_2^n\lambda_2(n)+\ldots.+\alpha_s^n\lambda_s(n)\\ a_{n+1}+\gamma_{n+1}&=\alpha_1^{n+1}\lambda_1(n+1)+\alpha_2^{n+1}\lambda_2(n+1)+\ldots.+\alpha_s^{n+1}\lambda_s(n+1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n+r-1}+\gamma_{n+r-1}&=\alpha_1^{n+r-1}\lambda_1(n+r-1)+\alpha_2^{n+r-1}\lambda_2(n+r-1)+\ldots.+\alpha_s^{n+r-1}\lambda_s(n+r-1) \end{aligned}$$

quand n augmente indéfiniment. En prenant encore les bornes inférieures des modules des racines $\alpha_1, \alpha_2,\ldots., \alpha_r$ dans un voisinage W_m, on pourra énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. - *Soit u_n le terme général d'une suite S vérifiant une relation de récurrence de la forme* (1) *et soit Γ une suite $\gamma_0, \gamma_1,\ldots., \gamma_n,\ldots.$ donnée. Posons $u_n\equiv\gamma_n+\varepsilon_n$* (mod. 1). *Soit $\bar{A}$ une région complètement intérieure au domaine limité par les conditions $|\alpha_h|>1$.*

L'ensemble des valeurs de α_k de $\bar{A}$ et l'ensemble des coefficients des polynômes $\lambda_k(n)$ sont dénombrables lorsque l'on a à partir d'un certain indice:

$$|\varepsilon_n|<\frac{1}{(2+\varepsilon)\prod\limits_{h=1}^{r}(|\alpha_h|+1)^2}.$$

D'autre part, dans tout domaine de $\bar{A}$ on peut déterminer des valeurs de α_k et des polynômes $\lambda_k(n)$ tels que l'on ait à partir d'un certain indice:

$$|\varepsilon_n|<\frac{1+\varepsilon}{2\prod\limits_{h=1}^{r}(|\alpha_h|-1)^2}.$$

NOMBRES σ. - *Dans ce qui suit nous prendrons la suite Γ particulière* 0, 0,...., 0,..... *Nous désignerons par σ toute racine α_h de l'équation caracté-*

ristique $P(z)=0$ *d'une suite récurrente* S, *si pour cette suite l'on a, à partir d'un certain indice:*

$$|\varepsilon_n| < c = \frac{1}{(2+\varepsilon)\prod\limits_{h=1}^{r}(|a_h|+1)^2}$$

où $\varepsilon_n \equiv u_n$ (mod. 1).

Le théorème précèdent montre que l'ensemble des nombres σ *est dénombrable.*

1°) *Tout entier algébrique, de module supérieur à* 1, *n'ayant aucun conjugué de module* 1, *est un nombre* σ.

Soient en effet $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s$ un système de s entiers algébriques conjugués et supposons

$$|\varrho_1| \geqq |\varrho_2| \geqq \ldots \geqq |\varrho_r| > 1 > |\varrho_{r+1}| \geqq \ldots \geqq |\varrho_s|.$$

Si l'on pose

$$u_n = \varrho_1^n + \varrho_2^n + \ldots + \varrho_r^n$$

et

$$\varepsilon_n = \varrho_{r+1}^n + \ldots + \varrho_s^n$$

les formules de Newton montrent que $u_n \equiv -\varepsilon_n$ (mod. 1). Or $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, donc $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r$ sont des nombres σ.

2°) *Les racines de module supérieur à* 1 *de l'équation caractéristique d'une suite récurrente* S *sont des nombres* σ *si la répartition* (mod. 1) *de la suite* S *a un nombre fini de points d'accumulation.*

Soit en effet $u_n \equiv \delta_n$ (mod. 1) et supposons que les nombres δ_n ont un nombre fini de points d'accumulation $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l$.

D'après un théorème connu d'approximation on peut déterminer des nombres rationnels de même dénominateur $\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_l}{q}$, tels que l'on ait simultanément:

$$\begin{aligned} p_1 - \zeta_1 q &= \eta_1 \\ p_2 - \zeta_2 q &= \eta_2 \\ \cdots & \cdots \\ p_l - \zeta_l q &= \eta_l \end{aligned}$$

où $|\eta_i| < \eta$, η étant un nombre aussi petit que l'on veut.

D'autre part par hypothèse

$$\delta_n = \zeta_i + \nu_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n=\infty} \nu_n = 0.$$

Soit S_q la suite d'éléments $qu_n \equiv q\delta_n$ (mod. 1).

Or

$$q\delta_n = q\zeta_i + q\nu_n = p_i - \eta_i + q\nu_n \equiv q\nu_n - \eta_i \text{ (mod. 1)}.$$

On voit donc que l'on peut trouver un nombre q tel que

$$qu_n \equiv \varepsilon_n \text{ (mod. 1)} \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_n| < c$$

à partir d'un certain indice. La suite S_q ayant la même équation caractéristique que la suite S, la proposition est démontrée.

Ainsi l'ensemble des valeurs de λ et de a est dénombrable lorsque la répartition (mod. 1) *de la suite $u_n = \lambda a^n$ a un nombre fini de points d'accumulation.*

REMARQUE : Tous les résultats précédents se transposent dans le domaine complexe lorsqu'on prend par exemple pour a_n des entiers d'un corps quadratique à éléments complexes. Le seul changement porte sur les constantes numériques provenant du fait qu'un entier est déterminé par une valeur approchée à $\frac{1}{2}$ près. Dans le cas complexe, $\frac{1}{2}$ est alors à remplacer par une constante appropriée.

CHAPITRE III.

Les nombres algébriques et la répartition modulo 1 d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

Les nombres σ nous ont montré l'existence d'un lien entre les nombres algébriques et la répartition (mod. 1) des suites récurrentes linéaires à coefficients constants. C'est ce rapport que nous allons préciser dans ce chapitre.

THÉORÈME DE FATOU. - *Soit E une suite d'entiers d'un corps algébrique K. Supposons qu'il existe entre les éléments de E une relation de récurrence d'ordre r :*

(1) $$a_{n+r} + \beta_1 a_{n+r-1} + \dots + \beta_r a_n = 0$$

et qu'il n'en existe aucune d'ordre $r-1$. Alors $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ sont des entiers de K.

Ce théorème est la généralisation d'un théorème énoncé par FATOU [8] pour les séries de TAYLOR à coefficients entiers rationnels représentant des fractions rationnelles.

Il est clair que les nombres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ appartiennent au corps K. En effet on peut résoudre un système de r relations (1) consécutives. Le déterminant des coefficients de $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ n'est pas nul, sinon la suite E vérifierait une relation de récurrence d'ordre inférieur à r.

En posant

$$\bar{a}_n = x_1 a_n + x_2 a_{n+1} + \dots + x_r a_{n+r-1}$$

$x_1, x_2, \dots, x_r$ étant des constantes, on obtient une suite $\bar{E}$: $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \dots$ vérifiant

---

[8] Acta mathematica, 30 (1906), pp. 335-400.

encore la relation (1). Il est facile de voir que l'on peut déterminer ces constantes $x_1, x_2, \ldots, x_r$ de façon que l'on ait:

$$\bar{a}_0 = \bar{a}_1 = \ldots = \bar{a}_{r-2} = 0, \qquad \bar{a}_{r-1} = \beta \tag{2}$$

β étant arbitraire. En effet le déterminant du système obtenu est égal au déterminant des coefficients de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ dans les r premières relations (1) et par conséquent n'est pas nul. On voit de plus que si l'on prend pour β un nombre du corps K, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ appartiennent aussi à K. En multipliant $x_1, x_2, \ldots, x_r$ par un entier convenable on pourra les rendre entiers dans K, et la suite $\bar{E}$ sera une suite d'entiers de K vérifiant la récurrence (1) et les relations (2).

Soit b_0 un entier de K tel que

$$b_0\beta_1 = b_1, \quad b_0\beta_2 = b_2, \ldots, \quad b_0\beta_r = b_r$$

soient entiers de K. Désignons par $\mathfrak{b}$ le plus grand commun diviseur idéal de $b_1, b_2, \ldots, b_r$, et par $\mathfrak{a}$ celui de tous les entiers de la suite $\bar{E}$.

Supposons alors qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ tel que l'idéal $\mathfrak{pb}$ divise b_0, et soit $\bar{a}_k$ le premier entier de la suite $\bar{E}$ non divisible par l'idéal $\mathfrak{pa}$ ($k \geqq r-1$). Les relations (1) nous donnent:

$$\begin{aligned}
b_1\bar{a}_k &= -(b_0\bar{a}_{k+1} + b_2\bar{a}_{k-1} + \ldots + b_r\bar{a}_{k-r+1})\\
b_2\bar{a}_k &= -(b_0\bar{a}_{k+2} + b_1\bar{a}_{k+1} + b_3\bar{a}_{k-1} + \ldots + b_r\bar{a}_{k-r+2})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_r\bar{a}_k &= -(b_0\bar{a}_{k+r} + b_1\bar{a}_{k+r-1} + \ldots + b_{r-1}\bar{a}_{k+1}).
\end{aligned}$$

Considérons la première égalité. Chaque élément de la somme au deuxième membre est divisible par l'idéal $\mathfrak{pab}$, ou est nul. On en déduit que $b_1\bar{a}_k$ est divisible par l'idéal $\mathfrak{pab}$. Or $b_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ et $\bar{a}_k = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_k$, l'idéal $\mathfrak{a}_k$ n'étant plus divisible par $\mathfrak{p}$. Il en résulte que l'idéal $\mathfrak{b}_1$ est divisible par $\mathfrak{p}$ et b_1 par $\mathfrak{pb}$. On démontre ainsi de proche en proche que $b_1, b_2, \ldots, b_r$ sont divisibles par $\mathfrak{pb}$, ce qui est contraire à la définition de $\mathfrak{b}$. Par conséquent on a $b_0 = \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}$ est idéal principal. Les quotients de $b_1, b_2, \ldots, b_r$ par b_0 sont donc des entiers du corps K, ce qui démontre le théorème.

Dans tout ce chapitre nous désignerons par E une suite $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ d'entiers d'un corps K, K étant le corps des nombres rationnels ou un corps quadratique à éléments complexes.

THÉORÈME I. - *Soit u_n le terme général d'une suite S vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, et soit E une suite $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ d'entiers rationnels ou d'entiers d'un corps quadratique à éléments complexes. Posons $u_n = a_n + \varepsilon_n$.*

Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|^2$ *est convergente, la suite E vérifie également une relation de récurrence linéaire à coefficients constants* [9].

Rappelons d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite E vérifie une relation de récurrence linéaire et à coefficients constants est que les déterminants

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

soient nuls à partir d'un certain indice $n \geqq k$; k est alors l'ordre minimum de la récurrence. Soit encore

$$u_{n+r} + \beta_1 u_{n+r-1} + \dots + \beta_r u_n = 0 \tag{1}$$

la récurrence à laquelle satisfait la suite S. Nous poserons:

$$\omega_{n+r} = a_{n+r} + \beta_1 a_{n+r-1} + \dots + \beta_r a_n = -(\varepsilon_{n+r} + \beta_1 \varepsilon_{n+r-1} + \dots + \beta_r \varepsilon_n).$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|^2$ étant convergente, il en est de même de la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\omega_{n+r}|^2$. En effet

$$|\omega_{n+r}| \leqq |\varepsilon_{n+r}| + |\beta_1 \varepsilon_{n+r-1}| + \dots + |\beta_r \varepsilon_n|$$

et d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ:

$$|\omega_{n+r}|^2 \leqq (r+1)(|\varepsilon_{n+r}|^2 + |\beta_1 \varepsilon_{n+r-1}|^2 + \dots + |\beta_r \varepsilon_n|^2).$$

On peut écrire D_n sous la forme suivante:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{r-1} & \omega_r & \dots & \omega_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r & \omega_{r+1} & \dots & \omega_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{n+r-1} & \omega_{n+r} & \dots & \omega_{2n} \end{vmatrix}.$$

Le théorème de M. HADAMARD sur le maximum du module d'un déterminant [10] nous donne:

$$\begin{aligned} |D_n|^2 &\leqq \prod_{h=0}^{r-1} (|a_h|^2 + |a_{h+1}|^2 + \dots + |a_{h+n}|^2) \prod_{h=r}^{n} (|\omega_h|^2 + |\omega_{h+1}|^2 + \dots + |\omega_{h+n}|^2) \\ &\leqq \prod_{h=0}^{r-1} (|a_h|^2 + |a_{h+1}|^2 + \dots + |a_{h+n}|^2) \prod_{h=r}^{n} \Big(\sum_{m=h}^{\infty} |\omega_m|^2\Big). \end{aligned}$$

---

[9] Ce théorème généralise un théorème de M. BOREL, Bull. des Sciences math. 18 (1894) p. 22 sur les séries de TAYLOR à coefficients entiers prolongeables analytiquement dans un cercle $|z| < 1 + \theta$, $\theta > 0$.

[10] Bull. des Sciences math., 17 (1893), p. 240.

Nous allons décomposer ce produit en trois parties. C_1, C_2, C_3, C_4 désigneront des constantes indépendantes de n.

1°). u_n vérifiant la relation (1) il existe un nombre $a>1$, supérieur aux modules de toutes les racines de l'équation caractéristique de (1), tel que $|a_n| \leqq |u_n| + |\varepsilon_n| \leqq C_1 a^n$. Donc

$$\prod_{h=0}^{r-1} (|a_h|^2 + |a_{h+1}|^2 + \dots + |a_{h+n}|^2) \leqq C_2 a^{2rn}.$$

2°). La série $\sum_{m=r}^{\infty} |\omega_m|^2$ étant convergente, on peut choisir un indice l assez grand pour que $\sum_{m=l}^{\infty} |\omega_m|^2 \leqq \frac{\theta}{a^{2r}}$, $0<\theta<1$.

Nous supposerons $n>l$, dans ces conditions:

$$\prod_{h=l}^{n} (\sum_{m=h}^{\infty} |\omega_m|^2) \leqq C_3 \left(\frac{\theta}{a^{2r}}\right)^n.$$

3°). Le produit $\prod_{h=r}^{l-1} (\sum_{m=h}^{\infty} |\omega_m|^2) = C_4$.

Il résulte de ces inégalités que

$$|D_n|^2 \leqq C_2 C_3 C_4 \theta^n.$$

Le deuxième membre tend vers 0 quand n augmente indéfiniment, donc l'entier D_n est nul à partir d'un certain indice, sinon son module ne pourrait être inférieur à 1.

REMARQUE: *Cette démonstration nous prouve aussi que, si une suite E vérifie une relation de la forme*:

$$a_{n+r} + \beta_1 a_{n+r-1} + \dots + \beta_r a_n = \omega_{n+r}$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\omega_{n+r}|^2$ *étant convergente, la suite E vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.*

THÉORÈME II. - *Soit* $u_n = a_n + \varepsilon_n$ *le terme général d'une suite S vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants dont l'équation caractéristique est* $P(z)=0$, *et soit K le corps des nombres rationnels ou un corps quadratique à éléments complexes auquel appartiennent les entiers* $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$

La condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|^2$ *soit convergente, c'est que toutes les racines* α_h *de* $P(z)=0$ *vérifiant l'inégalité* $|\alpha_h| \geqq 1$

soient des entiers algébriques. De plus, il faut que tout conjugué α_l par rapport à K de α_h, tel que $|\alpha_l| \geqq 1$, soit racine de $P(z)=0$ avec le même ordre de multiplicité que α_h.

Soit en effet

$$P(z) \equiv z^r + \beta_1 z^{r-1} + ... + \beta_r.$$

D'après le théorème de FATOU, si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|^2$ est convergente, la suite E vérifie une récurrence

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + ... + b_k a_n = 0$$

d'équation caractéristique

$$Q(z) \equiv z^k + b_1 z^{k-1} + ... + b_k = 0$$

b_1, b_2,...., b_k étant des entiers de K. La série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

représente le développement d'une fraction rationnelle qui n'a pas de pôle dans le cercle $|z|<1$. D'autre part $|\varepsilon_n|$ décroît trop vite pour qu'il puisse y avoir un pôle sur le cercle $|z|=1$. Les équations $P(z)=0$ et $Q(z)=0$ ont donc les mêmes racines de module supérieur ou égal à 1 et avec le même ordre de multiplicité. De plus soit $Q_h(z)=0$ l'équation irréductible dans K à laquelle satisfait la racine α_h. Si α_h est racine d'ordre p_h de $Q(z)=0$, $Q(z)$ est divisible dans K par $[Q_h(z)]^{p_h}$.

En particulier, si toutes les racines de $P(z)=0$ ont des modules supérieurs ou égaux à 1, toutes ces racines sont des entiers algébriques et par suite aussi les coefficients β_1, β_2,...., β_r.

THÉORÈME III. - *Soit $u_n = \alpha_1^n \lambda_1(n) + \alpha_2^n \lambda_2(n) + ... + \alpha_s^n \lambda_s(n) = a_n + \varepsilon_n$ le terme général d'une suite S et soit a_0, a_1,...., a_n.... une suite E d'entiers d'un corps K, K étant le corps des nombres rationnels ou un corps quadratique à éléments complexes. $\lambda_1(n)$, $\lambda_2(n)$,...., $\lambda_s(n)$ sont des polynômes en n, et $|\alpha_h| \geqq 1$ ($h=1, 2,...., s$).*

1°). *Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|^2$ est convergente, α_1, α_2,...., α_s sont des entiers algébriques. Les coefficients du polynôme $\lambda_h(n)$ sont des nombres algébriques du corps (K, α_h). Si α_l et α_h sont conjugués par rapport à K, les polynômes $\lambda_l(n)$ et $\lambda_h(n)$ le sont également.*

2°). *Réciproquement, supposons donnés les polynômes $\lambda_h(n)$ à coefficients algébriques quelconques. Soit K_h le corps déduit de K par l'adjonction des coefficients de $\lambda_h(n)$. Si K est réel nous supposons de plus qu'avec $\lambda_h(n)$ on a toujours le polynôme imaginaire conjugué $\lambda_{h'}(n)$. Il existe alors des entiers α_h*

du corps K_h avec $|a_h|>1$, tels que la série $\sum_{n=0}^{\infty}|\varepsilon_n|^2$ soit convergente, et même de façon plus précise que $|\varepsilon_n|<C\theta^n$ où $0<\theta<1$. Le nombre des conjugués de a_h par rapport à K, dont le module n'est pas inférieur à 1, est égal au nombre des polynômes conjugués de $\lambda_h(n)$ par rapport à K.

Soit p_h-1 le degré du polynôme $\lambda_h(n)$. u_n vérifie une relation

$$u_{n+r}+\beta_1 u_{n+r-1}+ \dots +\beta_r u_n=0 \tag{1}$$

d'équation caractéristique

$$P(z)\equiv z^r+\beta_1 z^{r-1}+\dots+\beta_r=0$$

et $r=p_1+p_2+\dots+p_s$ est l'ordre minimum de la récurrence (1). Soient $Q(z)$ et $Q_h(z)$ les polynômes définis plus haut, on a:

$$Q(z)\equiv[Q_1(z)]^{p_1}[Q_2(z)]^{p_2}\dots[Q_t(z)]^{p_t}\overline{Q}(z)$$

$t\leqq s$; t est inférieur à s s'il y a des nombres a_l conjugués de a_h par rapport à K. En effet $Q(z)$ est alors divisible par $[Q_h(z)]^{p_h}$ et par $[Q_h(z)]^{p_l}$ ce qui montre que $p_h=p_l$. Les racines de $\overline{Q}(z)=0$ sont des entiers de K de module inférieur à 1; le module du terme constant de $\overline{Q}(z)$, entier de K, serait donc inférieur à 1 ce qui est impossible, par suite $\overline{Q}(z)\equiv 1$.

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle donne:

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n z^n=\frac{R(z)}{P^*(z)}=\frac{R_1(z)}{(1-\alpha_1 z)^{p_1}}+\frac{R_2(z)}{(1-\alpha_2 z)^{p_2}}+\dots+\frac{R_s(z)}{(1-\alpha_s z)^{p_s}}$$

$R_h(z)$ étant un polynôme de degré p_h-1. D'autre part:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=\frac{H(z)}{Q^*(z)}$$

où $H(z)$ est un polynôme à coefficients entiers de K. La série $\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n z^n$ représentant une fraction rationnelle $\varepsilon(z)$ n'ayant aucun pôle dans le cercle $|z|\leqq 1$, on peut écrire:

$$\frac{H(z)}{Q^*(z)}=\frac{R_1(z)}{(1-\alpha_1 z)^{p_1}}+\frac{R_2(z)}{(1-\alpha_2 z)^{p_2}}+\dots+\frac{R_s(z)}{(1-\alpha_s z)^{p_s}}-\varepsilon(z)$$

ce qui donne la décomposition en éléments simples relative aux pôles contenus dans le cercle $|z|\leqq 1$ de la fraction rationnelle $\frac{H(z)}{Q^*(z)}$. Il résulte du calcul classique que les coefficients du polynôme $R_h(z)$ sont des nombres du corps (K, a_h), et par suite il en est ainsi des coefficients du polynôme $\lambda_h(n)$ qui s'en déduisent rationnellement. Si a_l est conjugué de a_h par rapport à K, le même calcul montre que les polynômes $\lambda_l(n)$ et $\lambda_h(n)$ sont conjugués par rapport à K.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème III, nous allons d'abord établir le lemme suivant:

LEMME: *Soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d$ les isomorphies d'un corps k avec ses conjugués par rapport à K. Si K est le corps des nombres rationnels, à chaque indice h en correspond un autre h' (qui peut être égal à h) tel que le corps $\tau_{h'}(k)$ soit imaginaire conjugué de $\tau_h(k)$. Soit $g \leqq d$ un entier tel que l'on ne puisse jamais avoir $h \leqq g$ et $h' > g$. Si K est un corps quadratique à éléments complexes, g est un entier quelconque $1 \leqq g \leqq d$.*

Dans ces conditions il existe toujours dans k un entier primitif a tel que $|\tau_h(a)| > 1$ si $h \leqq g$ et $|\tau_h(a)| < \theta < 1$ si $h > g$.

En effet soit $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l$ une base des entiers de k relativement au corps des nombres rationnels. $l = d$ si K est le corps des nombres rationnels et $l = 2d$ si K est un corps quadratique. Dans le dernier cas, nous ajoutons encore les d bases imaginaires conjuguées des bases des corps $\tau_h(k)$, pour que le déterminant formé avec ces éléments ne soit pas nul. En vertu du lemme de MINKOWSKI il existe un entier a pour lequel

$$|\tau_h(a) - \tau_{h-1}(a)| < \theta \quad \text{si} \quad 1 < h \leqq g$$

et

$$|\tau_h(a)| < \theta \quad \text{si} \quad g < h \leqq d.$$

Il y a même une infinité d'entiers a vérifiant ces conditions. $|a|$ ne peut être borné, donc il y a au moins un a pour lequel

$$|\tau_h(a)| > 1, \qquad (h = 1, 2, \ldots, g).$$

Si a n'est pas primitif on le remplace par $a^n \omega$, ω étant un entier primitif. En effet a' et ω' étant les conjugués de a et de ω du corps k' on ne peut avoir $a'^n \omega' = a^n \omega$ que si $a' \neq a$, car $\omega' \neq \omega$. Or alors il existe toujours une infinité d'exposants n tels que l'égalité $\frac{\omega}{\omega'} = \left(\frac{a'}{a}\right)^n$ soit impossible.

Considérons alors le polynôme $\lambda_h(n)$ et prenons pour corps k le corps K_h. Il existe un entier rationnel l tel que

$$l\lambda_h(n) = l_1(n) + \bar{a}_h l_2(n) + \ldots + \bar{a}_h^{d-1} l_d(n)$$

où les polynômes $l_1(n), l_2(n), \ldots, l_d(n)$ ont tous leurs coefficients entiers dans K_h, et où $\bar{a}_h$ est un entier primitif de la nature précédente.

Posons $a = l\bar{a}^q$, où q est un entier rationnel assez grand pour que l'on ait $|a_h| = |l\bar{a}_h^q| < \theta$ pour tout h vérifiant $g < h \leqq d$. On a dans ces conditions:

$$a_h^n \lambda_h(n) = [l_1(n) + \bar{a}_h l_2(n) + \ldots + \bar{a}_h^{d-1} l_d(n)] l^{n-1} \bar{a}_h^{qn}$$

ce qui montre que $\alpha_h^n \lambda_h(n)$ est un entier de K_h quel que soit n. Donc

$$a_n = \alpha_1^n \lambda_1(n) + \alpha_2^n \lambda_2(n) + \dots + \alpha_d^n \lambda_d(n)$$

est un entier de K quel que soit n et

$$|\varepsilon_n| = |\alpha_{g+1}^n \lambda_{g+1}(n) + \dots + \alpha_d^n \lambda_d(n)| < C\theta^n.$$

On partagera les polynômes $\lambda_h(n)$ donnés en groupes de polynômes conjugués par rapport à K, et dans chaque groupe on prendra g au plus égal au nombre de polynômes de ce groupe. On obtient ainsi la deuxième partie du théorème III.

REMARQUE : *Supposons que dans l'énoncé du théorème III les nombres* α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ *soient algébriques et soit* $Q(z) \equiv b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \dots + b_k = 0$ *une équation à coefficients entiers de* K *admettant chaque* α_h *comme racine d'ordre* p_h *au moins* ($h = 1, 2, \dots, s$).

La première partie du théorème III est alors encore vraie si

1°) $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ *à partir d'un certain indice* n, *où* $\frac{1}{\varepsilon} = |b_0| + |b_1| + \dots + |b_k|$.

2°) *la suite* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots$ *a un nombre fini de points d'accumulation.*

En effet sous les conditions énoncées u_n vérifie la récurrence :

$$b_0 u_{n+k} + b_1 u_{n+k-1} + \dots + b_k u_n = 0 \tag{3}$$

et l'on a

$$\bar{a}_n = b_0 a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \dots + b_k a_n = -(b_0 \varepsilon_{n+k} + b_1 \varepsilon_{n+k-1} + \dots + b_k \varepsilon_n).$$

Or $\bar{a}_n$ est un entier de K, si donc $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ à partir d'un certain indice, $|\bar{a}_n| < 1$ et la suite E vérifie la récurrence (3). Il en résulte toutes les conséquences indiquées.

La partie 2°) se démontre en raisonnant comme au chapitre II, p. 24. Si donc pour une telle suite u_n toutes les conditions ne sont pas remplies, la suite $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n, \dots$ a une infinité de points d'accumulation. En particulier :

Si α *est un nombre algébrique qui n'est pas un entier dont tous les autres conjugués ont des modules non supérieurs à* 1, *la répartition* modulo 1 *de la suite* $u_n = \lambda \alpha^n$ *a une infinité de points d'accumulation quel que soit le nombre* λ.

En combinant les résultats du chapitre II avec cette remarque on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. - *Soient* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ *des racines distinctes ou non d'un polynôme* $Q(z) \equiv b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \dots + b_k = 0$ *à coefficients entiers d'un corps K. Nous supposerons de plus* $|\alpha_1| > 1, |\alpha_2| > 1, \dots, |\alpha_r| > 1$ *et que K est le corps des nombres rationnels ou un corps quadratique à coefficients complexes. Dans ce dernier cas soit* ω *une quantité telle que,* ζ *étant un nombre* *quelconque, il existe dans K au moins un entier b pour lequel* $|b-\zeta|\leqq\omega$. *Si K est le corps des nombres rationnels nous poserons* $\omega=\frac{1}{2}$.

Si le nombre r des racines $\alpha_1, \alpha_2,...., \alpha_r$ est inférieur au nombre total des racines de module supérieur à 1 de $Q(z)=0$ on a l'inégalité:

$$\prod_{h=1}^{r}(|\alpha_h|-1)\leqq\omega(|b_0|+|b_1|+....+|b_k|).$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2,...., \alpha_s$ les racines distinctes d'entre $\alpha_1, \alpha_2,...., \alpha_r$. On a vu au chapitre II que l'on pouvait déterminer des polynômes $\lambda_h(n)$ de façon que l'on ait

$$|\varepsilon_n|\leqq\frac{\omega}{\prod\limits_{h=1}^{s}(|\alpha_h|-1)^{p_h}}$$

à partir d'un certain indice, p_h-1 étant le degré en n du polynôme $\lambda_h(n)$. Prenons alors p_h égal au nombre de fois que α_h figure dans l'ensemble $\alpha_1, \alpha_2,...., \alpha_r$. Alors $u_n=\alpha_1^n\lambda_1(n)+\alpha_2^n\lambda_2(n)+.....+\alpha_s^n\lambda_s(n)$ vérifie la récurrence:

$$b_0u_{n+k}+b_1u_{n+k-1}+....+b_ku_n=0.$$

Si donc $\dfrac{Q(z)}{\prod\limits_{h=1}^{r}(z-\alpha_h)}=0$ admet une racine de module supérieur à 1, on a nécessairement:

$$\varepsilon=\frac{1}{|b_0|+|b_1|+....+|b_k|}\leqq\frac{\omega}{\prod\limits_{h=1}^{r}(|\alpha_h|-1)}.$$

CHAPITRE IV.

Etude de la suite $u_n=\lambda\alpha^n$ et application à l'approximation rationnelle des nombres algébriques.

Ce chapitre est consacré à l'étude de la suite S: $u_n=\lambda\alpha^n$ où les nombres $\alpha>1$ et $\lambda>0$. Soit E une suite $a_0, a_1,...., a_n,....$ d'entiers rationnels. On posera $u_n=a_n+\varepsilon_n$ et on déterminera a_n par la condition: $-\frac{1}{2}<\varepsilon_n\leqq\frac{1}{2}$. D'après les résultats obtenus au chapitre II nous définissons la suite E par les inégalités:

$$-\frac{1}{2}<\omega_{n+2}=\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2}\end{vmatrix}}{a_n}\leqq\frac{1}{2}$$

ou encore:

$$-\frac{1}{2}<a_{n+2}-\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\leqq\frac{1}{2}$$

a_{n+2} est donc l'entier le plus voisin de $\frac{a_{n+1}^2}{a_n}$. a_0 et a_1 étant pris dans une région $\overline{U}_0$ que nous définirons plus loin, nous étudierons l'ensemble dénombrable des nombres τ que l'on obtient comme limite du rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ d'une suite E quand n augmente indéfiniment. Cet ensemble contient l'ensemble des nombres σ caractérisés par la condition suivante: il existe un nombre λ tel que si l'on pose $\lambda\sigma^n = a_n + \varepsilon_n$ on ait à partir d'un certain indice n:

$$|\varepsilon_n| \leqq c < \frac{1}{2(\sigma+1)^2}.$$

Ce dernier ensemble contient à son tour l'ensemble infini dénombrable des entiers algébriques, que nous désignons par ϱ, dont tous les conjugués autres que ϱ ont un module inférieur à 1. Ces nombres ϱ sont caractérisés par la condition qu'il existe un nombre λ tel que, si l'on pose $\lambda\varrho^n = a_n + \varepsilon_n$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|^2$ soit convergente.

On peut se demander si ces trois ensembles dénombrables ne coïncident pas. Je n'ai pas réussi à démontrer cette hypothèse qui paraît très vraisemblable, mais je vais indiquer quelques résultats dans cet ordre d'idées.

Etude des suites E définissant les nombres τ. - Nous allons utiliser la méthode indiquée au chapitre I. Les paramètres a et λ sont donnés par les formules:

$$a = \varphi_{n,1}(u_n, u_{n+1}) \equiv \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{et} \quad \lambda = \varphi_{n,2}(u_n, u_{n+1}) \equiv \frac{u_n^{n+1}}{u_{n+1}^n}.$$

On a par conséquent:

$$\varphi_{n,1}^{(2)} = \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\lambda a^n} \quad \text{et} \quad \varphi_{n,2}^{(2)} = -\frac{n u_n^{n+1}}{u_{n+1}^{n+1}} = -\frac{n}{a^{n+1}}.$$

Nous définirons la région $\overline{A}$ par les inégalités:

$$a \geqq 1 + \mu \quad \text{et} \quad \lambda \geqq \nu$$

μ et ν étant deux quantités positives, pour l'instant encore arbitraires. Dans cette région $|\varphi_{n,1}^{(2)}|$ et $|\varphi_{n,2}^{(2)}|$ sont bornés respectivement par $\frac{1}{\nu(1+\mu)^n}$ et par $\frac{1}{(1+\mu)^{n+1}}$ et on a:

$$\Psi_{0,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(1+\mu)^n} = \frac{1}{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \Psi_{0,2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\mu)^{n+1}} = \frac{1}{\mu^2}.$$

Soient alors a_0 et a_1 deux entiers de la région $\overline{U}_0$ definie par les inégalités:

$$\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{2\mu\nu} \geqq 1 + \mu \quad \text{et} \quad a_0 - \frac{1}{2\mu^2} \geqq \nu.$$

La suite E déduite de a_0 et de a_1 vérifiera alors toutes les conditions exigées au chapitre I et par suite $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ a une limite τ et $\frac{a_n^{n+1}}{a_{n+1}^n}$ une limite λ telles que:

$$\left|\frac{a_1}{a_0}-\tau\right| \leqq \frac{1}{2\mu\nu} \quad \text{et} \quad |a_0-\lambda| \leqq \frac{1}{2\mu^2}.$$

Pour préciser la région $\bar{U}_0$ posons:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} x=\mu+\dfrac{1}{2\mu\nu} \\ y=\nu+\dfrac{1}{2\mu^2}. \end{cases}$$

Aussi longtemps que le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(x,y)}{D(\mu,\nu)}=\left(1-\frac{1}{\mu^2\nu}\right)\left(1+\frac{1}{2\mu^2\nu}\right)$$

n'est pas nul, donc pour $\mu^2\nu>1$, on peut résoudre les équations (1) en μ et ν. Ceci exige que $x^2y>\frac{27}{8}$, c'est à dire $\bar{U}_0$ est défini par l'inégalité:

$$a_1 \geqq a_0+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3a_0}{2}}$$

a_0, a_1 étant les coordonnées d'un point de la région $\bar{U}_0$, nous prendrons pour μ la plus grande racine de l'équation:

$$2a_0^2t^3-2(a_1-a_0)a_0t^2+a_1-a_0=0$$

et la plus grande valeur possible pour ν s'en déduira par la formule:

$$\nu=a_0-\frac{1}{2\mu^2}.$$

D'autre part on constate facilement que l'on a toujours:

$$\frac{1}{\mu\nu}<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2a_0}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mu^2}<\min\left(\frac{9}{4\left(\frac{a_1}{a_0}-1\right)^2},\ \frac{a_0}{3}\right).$$

En particulier si $a_1 \geqq a_0+2\sqrt{a_0}$, $\frac{1}{\mu\nu} \leqq \frac{1}{a_1-a_0}$. On pourra déterminer dans chaque cas particulier les meilleures limites en résolvant le système (1).

On constate aussi que l'on peut obtenir des nombres τ aussi voisins de 1 que l'on veut si a_0 est assez grand.

THÉORÈME. - *Soient a_0 et a_1 deux entiers positifs tels que $a_1 \geqq a_0+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}a_0}$ et soit E la suite déduite de proche en proche de a_0 et de a_1 par les inégalités:*

$$-\frac{1}{2}<a_{n+2}-\frac{a_{n+1}^2}{a_n} \leqq \frac{1}{2}.$$

Dans ces conditions le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *a une limite* τ *quand* n *augmente indéfiniment et*

$$\left|\frac{a_1}{a_0}-\tau\right|<\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2a_0}}, \quad \textit{et même} \quad \left|\frac{a_1}{a_0}-\tau\right|\leqq\frac{1}{2(a_1-a_0)}$$

si $a_1\geqq a_0+2\sqrt{a_0}$.

De même le rapport $\frac{a_n^{n+1}}{a_{n+1}^n}$ *a une limite* λ *quand* n *augmente indéfiniment et*

$$|a_0-\lambda|<\min\left(\frac{9}{4\left(\frac{a_1}{a_0}-1\right)^2}, \frac{a_0}{3}\right).$$

On a toujours $\tau>1$, *et les nombres* τ *sont partout denses. Si l'on pose:* $\lambda\tau^n=a_n+\varepsilon_n$ *on aura à partir d'un certain indice:*

$$|\varepsilon_n|\leqq c' \quad \textit{où} \quad c'>\frac{1}{2(\tau-1)^2}.$$

Il est intéressant de signaler que toute suite E *déduite de la façon précédente de deux entiers* a_0, a_1, *est telle que le rapport* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *a une limite* $\tau\geqq 1$ *quand* n *augmente indéfiniment, pourvu que* $a_1\geqq a_0$.

En effet posons

$$a_{n+1}-a_n=l_n \quad \text{et} \quad \frac{l_n^2}{a_n}=h+\theta$$

h étant un entier et $|\theta|\leqq\frac{1}{2}$. Nous allons montrer que $\frac{l_{n+1}^2}{a_{n+1}}>h+\theta$ si $h\geqq 1$. En effet comme

$$\frac{a_{n+1}^2}{a_n}=a_n+2l_n+\frac{l_n^2}{a_n} \quad \text{on a} \quad l_{n+1}=l_n+h$$

$$\frac{l_{n+1}^2}{a_{n+1}}=\frac{(l_n+h)^2}{a_n+l_n}>h+\theta \quad \text{si l'on a} \quad a_n<\frac{(l_n+h)^2}{h+\theta}-l_n.$$

Or $a_n=\frac{l_n^2}{h+\theta}$, l'inégalité a donc lieu si:

$$\frac{l_n^2}{h+\theta}<\frac{(l_n+h)^2}{h+\theta}-l_n$$

c'est-à-dire si $l_n(h-\theta)+h^2>0$, ce qui est évident.

Par conséquent si $h\geqq 1$, $l_{n+2}\geqq l_{n+1}+h$.

D'autre part si $h=0$, $l_{n+1}=l_n$ donc

$$\frac{l_{n+1}^2}{a_{n+1}}=\frac{l_n^2}{a_{n+1}}\leqq\frac{l_n^2}{a_n}=\theta$$

et par suite $l_{n+2}=l_{n+1}$.

Si donc $\frac{l_0^2}{a_0}<\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si $a_1<a_0+\sqrt{\frac{a_0}{2}}$, toutes les différences l_n sont constantes et la suite E est formée d'entiers égaux si $a_1=a_0$ ou est une progression arithmétique si $a_1>a_0$. Dans les deux cas $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

Si $\frac{l_0^2}{a_0}\geqq\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si $a_1\geqq a_0+\sqrt{\frac{a_0}{2}}$, on a $h\geqq 1$ et par suite $l_{n+1}\geqq l_n+1$, donc $l_n\geqq n$ et $a_n\geqq a_0+nl_0+\frac{1}{2}n(n-1)$. Or

$$\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leqq\frac{1}{2a_n}$$

ce qui est le terme général d'une série convergente. $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ a donc bien une limite τ si n augmente indéfiniment, et comme $a_{n+1}>a_n$, $\tau\geqq 1$.

Les nombres ϱ du second degré. - *Soit E une suite $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ déduite de a_0 et a_1 par les inégalités $-\frac{1}{2}<a_{n+2}-\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\leqq\frac{1}{2}$. Soit r l'entier tel que*

$$\frac{a_1^2}{a_0}-\frac{1}{2}<r\leqq\frac{a_1^2}{a_0}+\frac{1}{2}$$

et p_0, q_0 une solution particulière en nombres entiers, s'il y en a, de l'équation $p_0a_1+q_0a_0=r$. S'il existe un entier m tel que

$$\frac{q_0-p_0}{a_1+a_0}\leqq m\leqq\frac{p_0+q_0-2}{a_1-a_0}$$

alors $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\varrho$, ϱ étant racine de l'équation $x^2-px-q=0$, où $p=p_0+ma_0$, $q=q_0-ma_1$.

Une équation

$$x^2-px-q=0 \tag{2}$$

admet un nombre ϱ pour racine si $-(p-2)\leqq q\leqq p$ et si $p>0$.

Désignons par ϱ_1, $|\varrho_1|<1$ le conjugué de ϱ. On a

$$p-1<\varrho<p+1 \quad \text{et} \quad \varrho>|q|+\frac{1}{2}.$$

En effet la dernière inégalité est vérifiée si $q<0$, car alors $|q|\leqq p-2$. Si $q>0$ écrivons:

$$\varrho=p+\frac{q}{\varrho}>p+\frac{q}{p+1}.$$

Or

$$p-q+\frac{q}{p+1}\geqq\frac{p}{p+1}\geqq\frac{1}{2}$$

d'où l'inégalité.

Soit alors a_0, a_1,...., a_n,.... une suite vérifiant la relation de récurrence

$$a_{n+2}-pa_{n+1}-qa_n=0$$

et cherchons dans quelles conditions cette suite vérifie les inégalités d'une suite E. Supposons $a_1>a_0$ et soit $\omega_{n+2}=a_{n+2}-\frac{a_{n+1}^2}{a_n}$. On a:

$$\omega_2=-\frac{1}{a_0}(a_1^2-pa_1a_0-qa_0^2)=-\frac{1}{a_1}(a_1-\varrho a_0)(a_1-\varrho_1 a_0).$$

Supposons $|\omega_2|\leqq\frac{1}{2}$, alors

$$\left|\frac{a_1}{a_0}-\varrho\right|\leqq\frac{1}{2(a_1-\varrho_1a_0)}<\frac{1}{2(a_1-a_0)}\leqq\frac{1}{2}$$

car $|\varrho_1|<1$ et $a_1>a_0$. En vertu de la relation de récurrence

$$\omega_3=-\frac{qa_0}{a_1}\omega_2 \quad \text{donc} \quad |\omega_3|=|\omega_2|\frac{|q|}{\frac{a_1}{a_0}}<\frac{\left(\varrho-\frac{1}{2}\right)}{2\left(\varrho-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}$$

et les nombres a_2 et a_1 vérifient les mêmes conditions que les nombres a_1 et a_0. La condition cherchée se réduit donc à:

$$-\frac{1}{2}<\omega_2\leqq\frac{1}{2}.$$

Supposons alors donnés les nombres a_0 et a_1. S'il existe des entiers p et q vérifiant la condition précédente on aura:

$$\frac{a_1^2}{a_0}-\frac{1}{2}<pa_1+qa_0\leqq\frac{a_1^2}{a_0}+\frac{1}{2}$$

donc l'équation $pa_1+qa_0=r$ aura des solutions en nombres entiers. Soit p_0, q_0 un système de solutions, toute solution est de la forme:

$$p=p_0+ma_0, \qquad q=q_0-ma_1.$$

Les inégalités $-(p-2)\leqq q\leqq p$ résolues par rapport à m démontrent le théorème.

THÉORÈME. - *Soit E une suite a_0, a_1,...., a_n,.... déduite de deux entiers a_0 et a_1, $a_1>a_0$, par les inégalités*:

$$-\frac{1}{2}<a_{n+2}-\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\leqq\frac{1}{2}.$$

Posons $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\tau$ *et* $\varepsilon=\pm1$.

1°). *Supposons* $a_0=2$, *si*:

$a_1=2u$, *on a* $\tau=u$

$a_1=4u+\varepsilon$, τ *est le nombre* ϱ *racine de* $x^2-(2u+\varepsilon)x+\varepsilon u=0$.

2°). *Supposons* $a_0=3$, *si*:

$a_1=3u$, $\tau=u$

$a_1=9u+\varepsilon$, τ *est le nombre* ϱ *racine de* $x^2-3ux-\varepsilon u=0$

$a_1=9u+2\varepsilon$, τ *est le nombre* ϱ *racine de* $x^3-3ux^2-2\varepsilon ux-u=0$

$a_1=9u+4\varepsilon$, τ *est le nombre* ϱ *racine de* $x^2-(3u+2\varepsilon)x+2\varepsilon u+1=0$.

Tous ces résultats, sauf le cas $a_0=3$, $a_1=9u+2\varepsilon$, s'obtiennent par l'application de la règle précédente. Le cas $a_0=3$, $a_1=9u+2\varepsilon$ nécessite une étude spéciale.

Etude des suites commençant par $a_0=3$, $a_1=9u+2\varepsilon$.

On détermine de proche en proche:

$$\begin{aligned} a_2&=27u^2+12\varepsilon u+1\\ a_3&=81u^3+54\varepsilon u^2+10u\\ a_4&=243u^4+216\varepsilon u^3+63u^2+4\varepsilon u\\ a_5&=729u^5+810\varepsilon u^4+324u^3+44\varepsilon u^2+u \end{aligned}$$

et alors le déterminant:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=-1.$$

Les équations:

$$\begin{aligned} a_3&=pa_2+qa_1+ra_0\\ a_4&=pa_3+qa_2+ra_1\\ a_5&=pa_4+qa_3+ra_2 \end{aligned}$$

sont donc résolubles en nombres p, q, r entiers et la résolution donne:

$$p=3u, \qquad q=2\varepsilon u, \qquad r=u.$$

L'équation $x^3-3ux^2-2\varepsilon ux-u=0$ correspondante admet une racine réelle positive

$$\varrho=3u+\frac{2}{3}\varepsilon-\frac{1}{27u}+\frac{\theta}{27u^2}$$

où $|\theta|<\frac{2}{3}$, et deux racines imaginaires conjuguées ϱ_1 et ϱ_2,

$$|\varrho_1|=|\varrho_2|=\sqrt{\frac{u}{\varrho}}<1.$$

Si nous posons

$$d_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{vmatrix}$$

les a_n étant liés par la récurrence:

$$a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$$

on voit facilement que

$$d_n = \lambda \cdot (\varrho_1\varrho_2)^n + \lambda_1 \cdot (\varrho\varrho_2)^n + \lambda_2 \cdot (\varrho\varrho_1)^n$$

avec

$$\lambda = \frac{d_2 - \varrho(\varrho_1 + \varrho_2)d_1 + \varrho^2\varrho_1\varrho_2 d_0}{\varrho_1\varrho_2(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)}$$

λ_1 et λ_2 s'en déduisent par permutation circulaire sur les indices des quantités ϱ.

Or

$$d_0 = -1$$
$$d_1 = -4\varepsilon u - 1$$
$$d_2 = 11u^2 + 4\varepsilon u.$$

En multipliant encore les expressions de λ_h ($h = 1, 2$) au numérateur et au dénominateur par $\varrho - \varrho_{3-h}$ pour faire apparaître au dénominateur la racine carrée du discriminant, les limites déterminées pour ϱ, ϱ_1 et ϱ_2 donnent

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| < 7, \qquad |\lambda| < \frac{1}{4}.$$

D'autre part

$$|\varrho\varrho_1| = |\varrho\varrho_2| < 2u + \frac{4}{9}\varepsilon \quad \text{et} \quad |\varrho_1\varrho_2| < \frac{4}{9};$$

et on voit que $|d_n| < \frac{a_n}{2}$ dès que $n \geqq 6$.

Mais l'on a $d_{n+3} = -qd_{n+2} - prd_{n+1} + r^2 d_n$ donc

$$d_3 = -10\varepsilon u^3 - 6u^2$$
$$d_4 = -13u^4 - 4\varepsilon u^3 - u^2$$

et par conséquent $|d_4| < \frac{a_4}{2}$ et

$$d_5 = 56\varepsilon u^5 + 37u^4 + 6\varepsilon u^3$$

donc aussi $|d_5| < \frac{a_5}{2}$; on a donc quel que soit n $|d_n| < \frac{a_n}{2}$ et la suite récurrente étudiée est la suite E déduite de $a_0 = 3$, $a_1 = 9u + 2\varepsilon$. Le nombre τ correspondant est ici un nombre ϱ du troisième degré.

Approximation des nombres algébriques.

THÉORÈME. - *Soit $a>1$ et a_0 un entier supérieur à $\frac{1}{a-1}$. S'il existe une suite E d'entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ et un nombre $\varepsilon>0$ tels que*

$$|a_{n+1}-aa_n|<\frac{1}{a_n^{\varepsilon}}$$

le nombre a est un entier algébrique ϱ de degré au plus égal à $1+\frac{1}{\varepsilon}$. Le degré n'est égal à $1+\frac{1}{\varepsilon}$ que si ϱ est une unité d'un corps du second degré réel ou d'un corps du troisième degré à corps conjugués complexes.

En effet, si nous supposons

$$a_n \geqq a_0 > \frac{1}{a-1}$$

ce qui a lieu pour $n=0$, il vient:

$$a_{n+1} \geqq aa_n - 1 = a_n\left(a-\frac{1}{a_n}\right) > a_n.$$

Par suite:

$$a-\frac{1}{a_n} > a-\frac{1}{a_0} = \frac{1}{\theta} > 1 \quad \text{et} \quad a_n > a_0 \frac{1}{\theta^n}.$$

Il existe donc un nombre $\theta<1$ tel que

$$|a_{n+1}-aa_n| < \frac{1}{a_0^{\varepsilon}}\theta^{\varepsilon n}$$

ce qui, d'après la remarque du théorème I du chapitre III, démontre que a est un entier algébrique. Soient $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{r-1}$ les conjugués, de module inférieur à 1, de ϱ et rangeons les dans l'ordre $|\varrho_1| \geqq |\varrho_2| \geqq \ldots \geqq |\varrho_{r-1}|$. Il existe un nombre λ tel que $a_n=\lambda\varrho^n-\varepsilon_n$ où $|\varepsilon_n|<C|\varrho_1|^n$ et par conséquent

$$|a_{n+1}-aa_n| < C'|\varrho_1|^n.$$

D'autre part a_n^{ε} est un infiniment grand équivalent à $\lambda'\varrho^{\varepsilon n}$ quand n augmente indéfiniment. On a donc:

$$\varrho|\varrho_1|^{\frac{1}{\varepsilon}} \leqq 1 \leqq |\varrho\varrho_1 \ldots \varrho_{r-1}| \leqq \varrho|\varrho_1|^{r-1} \quad \text{d'où} \quad r \leqq 1+\frac{1}{\varepsilon}.$$

L'égalité ne peut avoir lieu que si $|\varrho\varrho_1 \ldots \varrho_{r-1}|=1$ et $|\varrho_1|=|\varrho_2|=\ldots=|\varrho_{r-1}|$. ϱ est donc une unité dont tous les conjugués ont même module. MINKOWSKI a montré que, pour des unités réelles, ce cas ne pouvait se présenter que dans les corps du second degré réels ou dans les corps du troisième degré à conjugués complexes.

Plus généralement soit donné un nombre a. a est algébrique s'il existe une suite d'approximations rationnelles $\frac{p_n}{q_n}$ *ayant les propriétés suivantes*:

1°). *La série* $\sum_{n=0}^{\infty} |p_n - aq_n|^2$ *est convergente.*

2°). *On peut trouver une suite d'entiers augmentant indéfiniment avec* n: $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *et des polynômes*:

$$c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \ldots + c_0 \quad et \quad d_r x^r + d_{r-1} x^{r-1} + \ldots + d_0$$

à coefficients entiers, n'ayant en commun aucune racine de module supérieur ou égal à 1, *tels que*

$$p_n = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \ldots + c_r a_{n+r} \quad et \quad q_n = d_0 a_n + d_1 a_{n+1} + \ldots + d_r a_{n+r}.$$

En effet l'on a:

$$(c_r - ad_r) a_{n+r} + (c_{r-1} - ad_{r-1}) a_{n+r-1} + \ldots + (c_0 - ad_0) a_n = p_n - aq_n.$$

D'après la remarque déjà citée, les a_n vérifient une relation de récurrence à coefficients entiers. L'équation caractéristique a au moins une racine β de module non inférieur à 1, car a_n augmente indéfiniment avec n; et β est entier algébrique. L'équation:

$$(c_r - ad_r) x^r + (c_{r-1} - ad_{r-1}) x^{r-1} + \ldots + c_0 - ad_0 = 0$$

admet cette racine β; et

$$d_r \beta^r + d_{r-1} \beta^{r-1} + \ldots + d_0 \neq 0$$

sinon β serait racine commune aux deux polynômes $c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \ldots + c_0$ et $d_r x^r + d_{r-1} x^{r-1} + \ldots + d_0$. On a donc:

$$a = \frac{d_0 + d_1 \beta + \ldots + d_r \beta^r}{c_0 + c_1 \beta + \ldots + c_r \beta^r}.$$

et a est algébrique.

Calcul numérique des nombres algébriques. - Les entiers algébriques ϱ peuvent être facilement calculés numériquement en passant par le calcul d'une suite E correspondante. Il suffit en effet de déterminer l'indice n à partir duquel a_{n+2} est l'entier le plus voisin de $\frac{a_{n+1}^2}{a_n}$ (a_n étant par exemple la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des conjugués du nombre ϱ).

En prenant $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ comme valeur approchée de ϱ, l'erreur commise est inférieure à $\frac{C}{a_n^{1+\varepsilon}}$, ε étant la puissance à laquelle il faut élever ϱ pour obtenir $\frac{1}{|\varrho_1|}$, c'est-à-dire $\varepsilon = -\frac{L|\varrho_1|}{L\varrho}$. Remarquons d'ailleurs que $\frac{a_{n+k}}{a_n}$ est, dans les mêmes conditions, une valeur approchée de ϱ^k, l'erreur commise étant encore inférieure à $\frac{C}{a_n^{1+\varepsilon}}$. Si ϱ est une unité du deuxième degré ou du troisième degré à conjugués complexes, ε est égal à 1 ou $\frac{1}{2}$ et l'approximation obtenue est du type de la meilleure approximation de ϱ, respectivement de la meilleure approximation simultanée de ϱ et de ϱ^2.

De plus ce procédé permet aussi le calcul numérique de tout nombre algébrique. En effet nous avons vu que pour un nombre α quelconque du corps de ϱ, il existe une puissance convenable q de ϱ, soit $\bar{\varrho} = \varrho^q$ telle que:

$$\alpha \bar{\varrho}^n = b_n + \varepsilon_n'$$

avec $|\varepsilon_n'| < \frac{C'}{a_n^{\varepsilon}}$, ε ayant la même valeur que plus haut. D'autre part:

$$\bar{\varrho}^n = a_n + \varepsilon_n''$$

avec $|\varepsilon_n''| < \frac{C''}{a_n^{\varepsilon}}$, donc: $|b_n - \alpha a_n| < \frac{C}{a_n^{\varepsilon}}$.

$\frac{b_n}{a_n}$ est une valeur approchée de α avec une approximation du même ordre que celle du nombre $\bar{\varrho}$. Les suites $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ et $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ se calculent par le procédé indiqué pour les suites E.

Nous voyons d'ailleurs que la meilleure approximation s'obtient avec ce procédé en prenant pour $\bar{\varrho}$ une unité, ce qui est toujours possible. Pour un calcul effectif, il est pourtant souvent plus commode de prendre un nombre $\bar{\varrho}$ quelconque, ce qui ne présente pas les mêmes difficultés que la recherche d'une unité.

Critères de transcendance. - Les résultats précédents relatifs aux nombres λ donnent également des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre λ soit algébrique. On pourra les énoncer sous la forme suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour que le nombre réel λ soit transcendant, c'est que la série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 (\pi \lambda x^n)$$

diverge pour toutes les valeurs réelles supérieures ou égales à 1 *de x; ou encore que le produit infini*:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \cos (\pi \lambda x^n)$$

diverge pour tout x réel supérieur ou égal à 1.

Si le nombre λ est complexe, le nombre λ' imaginaire conjugué de λ est algébrique avec λ, donc aussi la partie réelle $\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')$ et la partie imaginaire pure $\frac{1}{2}(\lambda-\lambda')$. Il suffira d'appliquer le résultat aux nombres réels $\lambda+\lambda'$ et $i(\lambda-\lambda')$.

Réciproquement la connaissance de la nature arithmétique du nombre λ nous renseigne sur les séries précédentes. Ainsi π étant transcendant.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(x^n)$ *diverge pour tout* $x \geqq 1$ *réel. Plus généralement la série* $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(\mu x^n)$ *diverge pour tout* $x \geqq 1$ *réel si* μ *est algébrique et non nul.*