Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 8, 157—181 (1967)

Mesure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov

J. AZEMA, M. KAPLAN-DUFLO et D. REVUZ

Recu le 26 Juin, 1966

0.0. Dans la théorie des chaines de Markov dont l'espace d'état est discret, on démontre (Cf [3]) l'existence sur toute classe récurrente d'une mesure invariante qui peut être finie ou infinie. Pour des processus de Markov plus généraux il n'y a pas de résultat semblable; les principaux articles traitant de cette question portent sur l'existence d'une mesure invariante finie. En revanche HARRIS dans [6] montre l'existence d'une mesure invariante σ-finie pour certaines chaines de Markov à valeurs dans un espace mesurable de type dénombrable. Nous allons utiliser ici ce résultat pour démontrer l'existence d'une mesure invariante dans la situation — analogue à celle des chaines — que nous allons décrire maintenant.

0.1. Soit E un espace localement compact à base dénombrable et $\mathscr{B}$ sa tribu borélienne.

Soit

$$X = \{\Omega, \mathscr{F}, (P_x)_{x \in E_+}, \quad (\theta_t)_{t \in R_+}, \quad (X_t)_{t \in R_+}\}$$

un processus de Hunt à valeurs dans $(\boldsymbol{E}, \mathscr{B})$ (Cf [5], [7] et [10]). Sans rappeler les axiomes, nous précisons les notations. Ω est l'espace des applications ω de $\mathbb{R}_+$ dans $\boldsymbol{E}$ continues à droite et pourvues de limite à gauche.

Les fonctions coordonnées sont désignéespar $(X_t)_{t \in R_+}$ et θ_t est l'opérateur défini par $X_{t+s}(\omega) = X_s(\theta_t \omega)$.

Soit $\mathscr{G}_t$ la tribu la moins fine rendant mesurables les variables aléatoires $(X_s)_{s \leqq t}$. A chaque x de $\boldsymbol{E}$, on associe une probabilité P_x sur $(\Omega, \mathscr{G}_\infty)$ telle que $P_x(X_0 = x) = 1$.

Si γ est une mesure sur $(\boldsymbol{E}, \mathscr{B})$, on pose pour $A \in \mathscr{G}_\infty$

$$P_\gamma(A) = \int \gamma(dx) P_x(A).$$

On appelle $\mathscr{F}_\infty$ la complétée de $\mathscr{G}_\infty$ par rapport à toutes les mesures P_γ où γ est une mesure bornée sur $\boldsymbol{E}$ et on pose:

$$\mathscr{F}_t = \bigcap_\gamma \{A \subset \Omega; \exists\, B \in \mathscr{G}_t \quad A \varDelta B \in \mathscr{F}_\infty \quad P_\gamma(A \varDelta B) = 0\}.$$

Un ensemble A est dit presque-borélien, si pour toute mesure γ il existe deux ensembles boréliens A' et A'' tels que $A' \subseteqq A \subseteqq A''$ et

$$P_\gamma[\omega: \exists\, t \geqq 0 \quad X_t(\omega) \in (A'' - A')] = 0.$$

Les ensembles presque-boréliens forment une tribu. Soient E_x l'opérateur espérance lié à P_x et P_t le semi-groupe de Markov associé à X. Pour toute fonction presque-borélienne f

$$P_t f(x) = E_x[f \circ X_t].$$

On dira qu'une fonction positive f est λ-excessive ($\lambda \in \mathbb{R}_+$) si

$$e^{-\lambda t} P_t f \leqq f$$

et si

$$\lim_{t \downarrow 0} e^{-\lambda t} P_t f = f .$$

On associe à X une topologie appelée topologie fine, qui est la topologie la moins fine rendant continues les fonctions λ-excessives pour un nombre λ positif arbitraire.

0.2. Dans [1] nous avons défini une notion de récurrence liée à la topologie fine: un point x de E est dit *finement récurrent* si pour tout voisinage fin presque borélien V de x

$$P_x\left[\overline{\lim_{t \to \infty}}\, 1_V(X_t) = 1\right] = 1 .$$

Il est dit *finement transient* si il existe un voisinage fin presque-borélien V de x tel que:

$$P_x\left[\overline{\lim_{t \to \infty}}\, 1_V(X_t) = 0\right] = 1 .$$

Tout point de E est soit finement récurrent soit finement transient. D'une manière analogue à celle employée pour les chaines nous avons construit des classes récurrentes. Sous l'hypothèse **(L)** de MEYER ([10]) nous avons montré que deux classes récurrentes distinctes sont contenues dans des ensembles disjoints finement fermés, presque boréliens et stables (on dit qu'un ensemble A est stable si

$$\forall x \in A \quad P_x[\forall t \in \mathbb{R}_+ X_t \in A] = 1) .$$

Ceci est encore vrai sous l'hypothèse un peu plus faible qu'il existe une mesure ξ sur E, telle que toute fonction invariante par P_t et nulle ξ-presque surement est nulle surement. La démonstration est la même.

Nous appellerons ces ensembles des *classes conservatives.*

0.3. Dans tout cet article nous supposerons cette condition réalisée, c'est à dire que chaque classe récurrente $\boldsymbol{C}$ est contenue dans une classe conservative $\boldsymbol{D}$ stable et presque borélienne.

Nous montrons que cela entraine l'existence et l'unicité pour toute classe conservative $\boldsymbol{D}$, d'une mesure μ invariante par le semigroupe P_t et portée par $\boldsymbol{D}$. Si $(U^\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ est la résolvante associée à P_t cette mesure est équivalente à $U^\lambda(x,.)$ pour tout λ positif et tout x récurrent appartenant à $\boldsymbol{D}$.

On associe à chaque fonctionnelle additive A telle que $E_\mu(A_t) < \infty$ une mesure γ_A bornée qui, lorsque A est continue, est invariante par $P_{\tau(t)}$, si $\tau(t)$ désigne le changement de temps associé à A. Si A et B sont deux telles fonctionnelles:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E_x A_t}{E_x B_t} = \frac{\|\gamma_A\|}{\|\gamma_B\|} \quad \mu \text{ p.s.}$$

$$\forall x \ \lim_{t \to \infty} \frac{A_t}{B_t} = \frac{\|\gamma_A\|}{\|\gamma_B\|} \quad P_x \text{ p.s.}$$

De plus sous l'hypothèse (F) de HUNT, pour tout $\lambda > 0$, $U_A^\lambda = U_{\gamma_A}^\lambda$.

I. Existence de la mesure invariante

I.1. Nous commençons par un lemme du à NAGASAWA et SATO [11] que nous redémontrons ici, afin que notre démonstration soit complète.

Lemme 1. *Une mesure μ, σ-finie, est invariante par le semi-groupe P_t si et seulement si elle est invariante par l'opérateur U^1.*

Démonstration. La nécessité est évidente.

1°) Supposons μ invariante par U^1, et soit Γ un borélien de E de μ-mesure finie. L'équation résolvante conduit à la relation

$$\mu(\Gamma) - \mu U^\lambda(\Gamma) = (\lambda - 1)\mu U^\lambda(\Gamma) \qquad \forall \lambda \geqq 0. \tag{1}$$

Si λ est supérieur à 1

$$\mu U^\lambda(\Gamma) \leqq \mu U^1(\Gamma) = \mu(\Gamma) < \infty$$

on peut donc retrancher $\mu U^\lambda(\Gamma)$ aux deux membres de (1) ce qui donne

$$\mu(\Gamma) = \lambda \mu U^\lambda(\Gamma) \qquad \forall \lambda \geqq 1.$$

Les mesures σ-finies μ et $\lambda \mu U^\lambda$ coïncident sur les ensembles de μ-mesure finie, et sont par conséquent égales.

2°) Supposant toujours $\lambda \geqq 1$ et $\mu(\Gamma) < \infty$ on a les relations

$$\mu U^\lambda(\Gamma) = \frac{1}{\lambda}\mu(\Gamma) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu(\Gamma)\,dt$$

et

$$\mu U^\lambda(\Gamma) = \int \mu(dx)\, U^\lambda(x, \Gamma) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu P_t(\Gamma)\,dt.$$

Donc pour tout nombre $\lambda \geqq 0$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-t}\mu P_t(\Gamma)\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-t}\mu(\Gamma)\,dt.$$

Il en résulte qu'il existe un ensemble N de mesure de Lebesgue nulle tel que:

$$\forall t \notin N \quad \mu P_t(\Gamma) = \mu(\Gamma).$$

3°) Soit $\{\Gamma_n\}$ une suite croissante de boréliens tels que $\bigcup_n \Gamma_n = E$

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \quad \mu(\Gamma_n) < \infty$$

et soit $\mathscr{S}$ une base dénombrable d'ouverts de E contenant l'ensemble E lui même. $\mathscr{S} \cap \Gamma_n$ est un π-système (cf. [5] appendice) engendrant la σ-algèbre $\mathscr{B} \cap \Gamma_n$, où $\mathscr{B}$ est la tribu borélienne de E. Il existe un ensemble N_n de mesure de Lebesgue nulle tel que

$$\forall t \notin N_n \quad \forall \Gamma \in \mathscr{S} \cap \Gamma_n \quad \mu P_t(\Gamma) = \mu(\Gamma).$$

Mais

$$\{\Gamma \in \mathscr{B} \cap \Gamma_n \mid \forall t \notin N_n \quad \mu P_t(\Gamma) = \mu(\Gamma)\}$$

est un λ-système contenant le π-système $\mathscr{S} \cap \Gamma_n$; il contient donc $\mathscr{B} \cap \Gamma_n$.

Il en résulte que:

$$\forall t \notin N = \bigcup_n N_n \quad \forall \Gamma \in \mathscr{B} \quad \mu P_t(\Gamma) = \mu(\Gamma).$$

Mais

$$\forall t \in N \quad \exists t_0 \in N^c \quad \text{tel que} \quad t + t_0 \in N^c.$$

Aussi pour toute fonction borélienne positive f on a en posant

$$\int \mu(dx) f(x) = \langle \mu, f \rangle$$

$$\langle \mu P_t, f \rangle = \langle \mu, P_t f \rangle = \langle \mu P_{t_0}, P_t f \rangle = \langle \mu P_{t+t_0}, f \rangle = \langle \mu, f \rangle.$$

Il en résulte que $\mu P_t = \mu$ quelque soit t dans $\mathbb{R}_+$.

I.2. Le lemme précédent ramène la recherche d'une mesure invariante par le semi-groupe (P_t) à celle d'une mesure invariante pour U_1. Cela conduit à étudier la chaine de Markov de fonction de transition U_1: nous allons l'interpréter comme une suite d'observations du processus X aux temps de saut d'un processus de Poisson indépendant de X.

Nous montrons un lemme technique dans un cadre un peu plus général, car il nous sera utile par la suite. Soit F une loi de probabilité sur $\mathbb{R}^+$. Considérons la promenade aléatoire

$$T = \{\Lambda, (\mathscr{G}_n)_{n \in N}, (\pi_t)_{t \in R^+}, (T_n)_{n \in N}, (\xi_n)_{n \in N}\}$$

où $\Lambda = (\mathbb{R}_+)^N$ est pris pour espace de probabilité; si λ est un élément de Λ ses coordonnées sont notées $\{T_n(\lambda)\}_{n \in N}$. $\mathscr{G}_n$ désigne la σ-algèbre engendrée par les variables aléatoires T_p, pour $p \leqq n$ et $\mathscr{G} = \bigvee_n \mathscr{G}_n$. π_0 est la probabilité sur $(\Lambda, \mathscr{G})$ telle que pour π_0 T_n soit la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi F. π_t est la loi π_0 translatée de t. ξ_n est l'opérateur de translation sur Λ. Nous désignerons enfin par $\mathfrak{M}_t$ l'opérateur espérance associé à π_t.

Soit $(E, \mathscr{B})$ un espace mesurable et P_t un semi-groupe de Markov défini sur $(E, \mathscr{B})$ et tel que pour tout x de E et tout A de $\mathscr{B}$ la fonction $t \to P_t(x, A)$ soit mesurable.

Considérons un processus de Markov $\{\Omega, \mathscr{F}, (P_x)_{x \in E}, \theta_t, \mathscr{F}_t\}$ de fonction de transition P_t (il n'est pas nécessaire de supposer que ce processus est un processus de Hunt, la propriété faible de Markov suffit).

Lemme.

$$Y = \{\tilde{\Omega} = \Omega \otimes \Lambda, \quad \tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \otimes \mathscr{G}, \quad \tilde{P}_x = P_x \otimes \pi_0, \quad Y_n(\omega, \lambda) = X^{(\omega)}_{T_n(\lambda)}\}$$

est une chaine de Markov à valeurs dans $(E, \mathscr{B})$ *de fonction de transition*

$$(x, A) \to \int_0^\infty P_t(x, A)\, dF(t).$$

Démonstration. Il nous faut montrer que si $\tilde{\mathscr{F}}_n$ est la tribu engendrée par Y_p pour $p \leqq n$ et si $A = \{Y_p \in \Gamma\}$ pour $p > n$ et $\Gamma \in \mathscr{B}$

$$\tilde{P}_x[A \mid \tilde{\mathscr{F}}_n] = \tilde{P}_{Y_n}[Y_{p-n} \in \Gamma]$$

car on aura alors:

$$\tilde{P}_x[A \mid \tilde{\mathscr{F}}_n] = \tilde{P}_x[A \mid Y_n]$$

ce qui est la définition d'une chaine de Markov.

Il nous faut donc montrer que si $B \in \tilde{\mathscr{F}}_n$

$$\int_B \tilde{P}_{Y_n}[Y_{p-n} \in \Gamma] d\tilde{P}_x = \int_B 1_A d\tilde{P}_x$$

et comme on peut se restreindre pour B à une famille d'ensembles engendrant $\tilde{\mathscr{F}}_n$, il suffit de montrer que si on a une suite $p_j (j = 1, 2, \ldots, n+1)$ de nombres entiers, et si Γ_j sont des ensembles de $(E, \mathscr{B})$, alors

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_x[Y_{p_1} \in \Gamma_1, \quad Y_{p_2} \in \Gamma_2, \ldots, Y_{p_n} \in \Gamma_n, \quad Y_{p_{n+1}} \in \Gamma_{n+1}]\\ &= \tilde{E}_x[1_{\{Y_{p_1} \in \Gamma_1\}} \cdots 1_{\{Y_{p_n} \in \Gamma_n\}} \tilde{P}_{Y_n}[Y_{p_{n+1}} - p_n \in \Gamma_{n+1}]] .\end{aligned}$$

Calculons le premier membre de cette égalité soit $\tilde{P}[H]$

$$\tilde{P}[H] = \int_\Omega dP_x(\omega) \int_\Lambda d\pi(\lambda) 1_{[X_{T_{p_1}} \in \Gamma_1]} \cdots 1_{[X_{T_{p_n}} \in \Gamma_n]} \mathfrak{M}_0[1_{\Gamma_{n+1}} \circ X_{T_{p_{n+1}}} | \mathscr{G}p_n]$$

car l'application

$$\lambda \to 1_{[X_{T_{p_n}}(\omega) \in \Gamma_j]}$$

est $\mathscr{G}_{p_n}$-mesurable pour ω fixé et $j \leqq n$.

ω étant fixé, soit φ_ω l'application

$$t \to 1_{\Gamma_{n+1}} \circ X_t$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_0[1_{\Gamma_{n+1}} \circ X_{T_{p_{n+1}}} | \mathscr{G}_{p_n}] &= \mathfrak{M}_0[\varphi_\omega(T_{p_{n+1}} - T_{p_n}) \circ \xi_{p_n} | \mathscr{G}_{p_n}]\\ &= \mathfrak{M}_{T_{p_n}}[\varphi_\omega(T_{p_{n+1}} - T_{p_n})]\\ &= \int_\Lambda d\pi_0(\lambda') \varphi_\omega[T^{(\lambda')}_{p_{n+1}-p_n} + T_{p_n(\lambda)}(\cdot)]\end{aligned}$$

par définition de $\mathfrak{M}_t$. Donc

$$\begin{aligned}\tilde{P}[H] &= \int_\Lambda d\pi_0(\lambda) \int_\Lambda d\pi_0(\lambda') \int_\Omega dP_x(\omega) 1_{[X_{T_{p_1}}(\lambda) \in \Gamma_1]}\\ &\ldots 1_{[X_{T_{p_n}}(\lambda) \in \Gamma_n]} 1_{[X_{T_{p_{n+1}-p_n}}(\lambda') + T_{p_n}(\lambda) \in \Gamma_{n+1}]}\\ &= \int_\Lambda d\pi_0(\lambda) \int_\Lambda d\pi_0(\lambda') E_x[1_{[X_{T_{p_1}}(\lambda) \in \Gamma_1]}\\ &\ldots 1_{[X_{T_{p_n}}(\lambda) \in \Gamma_n]} E_x[1_{\Gamma_{n+1}} \circ X_{T_{p_{n+1}-p_n}(\lambda')} \circ \Theta_{T p_n(\lambda)} \mathscr{F}_{T p_n(\lambda)}]]\\ &= \int_\Lambda d\pi_0(\lambda) \int_\Lambda d\pi_0(\lambda') \int_\Lambda dP_x(\omega) 1_{[X_{T_{p_1}}(\lambda) \in \Gamma_1]}\\ &\ldots 1_{[X_{T_{p_n}}(\lambda) \in \Gamma_n]} E_{X_{T_{p_n}}(\lambda)(\omega)} [1_{[X_{T_{p_{n+1}-p_n}}(\lambda')(\omega) \in \Gamma_{n+1}]}]\\ &= \tilde{E}_x[1_{[X_{T_{p_1}} \in \Gamma_1]} \ldots 1_{[X_{T_{p_n}} \in \Gamma_n]} \pi_0 \otimes P_{X_{T_{p_n}}(\lambda)}(d\lambda', d\omega)[X_{T_{p_{n+1}-p_n}(\lambda')}(\omega) \in \Gamma_{n+1}]]\\ &= \tilde{E}_x[1_{[X_{T_{p_1}} \in \Gamma_1]} \ldots 1_{[X_{T_{p_n}} \in \Gamma_n]} \tilde{P}_{Y_n}[Y_{p_{n+1}} - p_n \in \Gamma_{n+1}]]\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. Y est donc bien une chaine de Markov et sa fonction de transition est donnée par l'application:

$$\begin{aligned}(x, \Gamma) \to \pi_0 \otimes P_x[X_{T_1(\omega)}(\lambda) \in \Gamma] &= E_x \int_\Lambda 1_\Gamma[X^{(\omega)}_{T_1(\lambda)}] \pi_0(d\lambda)\\ &= E_x \int_0^\infty 1_\Gamma(X_t) dF(t) = \int_0^\infty P_t(x, \Gamma) dF(t) .\end{aligned}$$

I.3. Théorème. *Pour toute classe conservative D, il existe une mesure invariante σ-finie unique concentrée sur D.*

Démonstration. Considérons la chaine de Markov Y construite à partir du lemme précédent en prenant pour F la loi exponentielle de paramètre 1 et pour processus de Markov le processus à valeurs dans $(\boldsymbol{D}, \mathscr{B}_D)$,

$$\{\Omega, \mathscr{F}, (P_x)_{x\in D}, (\theta_t)_{t\in R^+}, (X_t)_{t\in R^+}\}.$$

Nous allons montrer que cette chaine Y est récurrente au sens suivant.

Soient $x \in C$ et $\nu > 0$. Pour tout ensemble A de $\mathscr{B}_D$ tel que $U^\nu(x, A) > 0$:

$$\forall z \in D \quad P_z\Big[\varlimsup_{n\to\infty} 1_{\{Y_n\in A\}} = 1\Big] = 1.$$

Soit

$$Z_t(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, 1_{[T_n(\lambda),\ T_{n+1}(\lambda)[}(t)$$

cette fonction aléatoire est pour la probabilité π_0, le processus de Poisson dont les T_n sont les temps de saut. On peut définir un processus équivalent sur un espace de probabilité canonique et l'on appellera encore π_0 la probabilité pour laquelle $\pi_0[Z_0 = 0] = 1$. On définira les π_n par $\pi_n[Z_t \in \Gamma] = \pi_0[Z_t \in \Gamma - n]$, les tribus $\mathscr{H}_t$ engendrées par $(Z_s)_{s\leqq t}$ et les opérateurs de translation ξ_t. Soit alors B un ensemble borélien de la demi-droite réelle positive dont la mesure de Lebesgue $\lambda(B)$ soit infinie et posons:

$$B_n = B \cap]n, n+1]$$

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} [T_k \in B_n].$$

On a:

$$\pi_0[E_n \,|\, \mathscr{H}_n] \geqq \pi_0[n + T_1 \circ \xi_n \in B_n \,|\, \mathscr{H}_n]$$

parce que l'évènement: il y a un saut dans B_n, contient l'évènement: le premier saut après n est dans B_n. Donc

$$\pi_0[E_n \,|\, \mathscr{H}_n] \geqq \pi_{Z_n}[T_1 \in B_n - n] = \pi_0[T_1 \in B_n - n]$$

parce que la loi du premier temps de saut est la même quelque soit le point d'où part le processus. Donc

$$\pi_0[E_n \,|\, \mathscr{H}_n] \geqq \int_{B_n - n} e^{-t}\,dt \geqq \frac{1}{e}\,\lambda(B_n).$$

Comme les T_k sont des temps d'arrêts du processus Z_t, les ensembles E_n sont $\mathscr{H}_{n+1}$ mesurables, on peut donc appliquer le théorème de Borel-Cantelli généralisé ce qui donne:

$$\pi_0\Big[\varlimsup_{n\to\infty} E_n\Big] = 1.$$

Mais en se rapportant à la définition de l'évènement $\varlimsup$ on voit que

$$\varlimsup_{n\to\infty} E_n \subset \varlimsup_{k\to\infty} \{T_k \in B\}.$$

Donc

$$\pi_0\left[\overline{\lim_{k\to\infty}}\{T_k\in B\}\right]=1\,.$$

Soit maintenant x un point récurrent (il en existe au moins un par hypothèse) et ν un nombre positif et A un ensemble de $\mathscr{B}_D$ tel que $U^\nu(x,A)>0$

$$\begin{aligned}\tilde{P}_x\left[\overline{\lim_{k\to\infty}}\{X_{T_k}\in A\}\right]&=\int_\Omega dP_x(\omega)\int_A d\pi_0(\lambda)\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\,1_{[X_{T_k(\omega)}(\lambda)\in A]}\right)\\&=\int_\Omega dP_x(\omega)\int_A d\pi_0(\lambda)\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\,1_{[T_k(\lambda)\in B_\omega]}\right)\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$B_\omega=\{t\,|\,X_t(\omega)\in A\}$$

or d'après la proposition IV.4 de [1], pour P_x-presque tout ω, B_ω est de mesure de Lebesgue infinie. Il en résulte que

$$\tilde{P}_x\left[\overline{\lim_{k\to\infty}}[Y_k\in A]\right]=1$$

ce qu'il fallait démontrer.

3°) On sait d'après un théorème de Harris [6] que si une chaine de Markov Y à valeur dans un espace mesurable de type dénombrable vérifie la condition suivante: il existe une mesure m telle que $m(A)>0$ entraine

$$P[Y_n\in A\text{ infiniment souvent}]=1$$

alors il existe une mesure invariante μ unique (à une constante multiplicative près) et telle que $m\ll\mu$.

Nous somme donc ici dans les conditions d'application de ce théorème pour la chaine Y si l'on prend pour mesure m, $U^\lambda(x,.)$ pour x dans $\boldsymbol{C}$ et λ étant un nombre positif quelconque. Il existe donc une mesure μ invariante par U^1, et d'après le lemme 1 par le semi-groupe P_t, unique et telle que

$$U^\lambda(x,.)\ll\mu$$

pour tout $\lambda>0$ et tout x récurrent.

Remarque. La mesure invariante μ est construite sur $\boldsymbol{D}\cap\mathscr{B}_E$ mais les ensembles presque-boréliens sont μ-mesurables. En effet si A est presque borélien, il existe deux ensembles boréliens A' et A'' tels que:

$$A'\subset A\subset A''\quad\text{et}\quad\forall t\in\mathbb{R}^+\;\;P_\mu(x_t\in A''-A')=0$$

on a donc:

$$\mu(A''-A')=\mu P_t(A''-A')=0$$

I.4. Nous avons vu dans [1] que les classes conservatives peuvent contenir strictement les classes récurrentes. C'est notemment le cas pour les chaines de Markov, mais alors la mesure invariante est portée par la classe récurrente. Ceci n'est pas général comme le montre l'exemple suivant repris de [1].

Soit $E=\{0\}\,U[1,\infty[$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. F étant une probabilité diffuse sur $[1,\infty[$ on pose

$$\begin{aligned}&\pi(0,.)=F(.)\\&\pi(y,.)=\varepsilon_0(.)\quad\text{si}\quad y\in[1,\infty[\end{aligned}$$

et l'on définit un processus de Hunt sur E par la fonction de transition

$$P_t(x,.) = e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\pi^{(n)}(x,.).$$

Le seul point finement récurrent est $\{0\}$ et la classe conservative associée est E. La mesure $F+\varepsilon_0$ est clairement invariante et elle charge $\boldsymbol{D}-\{0\}$ — ceci est lié au fait que la probabilité de récurrence dans $\boldsymbol{D}-\{0\}$ en partant de 0 est 1.

La proposition suivante précise les rapports entre la classe conservative et la mesure invariante μ.

Proposition. *Soit* $\boldsymbol{C}$ *une classe récurrente,* $\boldsymbol{D}$ *la classe conservative associée et* F *un ensemble stable tel que*

$$\boldsymbol{D}\supseteqq F\supseteqq \boldsymbol{C}. \quad \textit{Alors} \quad \mu(F^c)=0.$$

Démonstration. Soit $\lambda>0$

$$\mu(F)=\lambda\mu U^\lambda(F)=\lambda\int_{\boldsymbol{D}}\mu(dy)\,U^\lambda(y,F)$$

$$\mu(F)=\lambda\int_F\mu(dy)\,U^\lambda(y,F)+\lambda\int_{F^c}\mu(dy)\,U^\lambda(y,F)$$

et pour $y\in F$, $U^\lambda(y,F)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_t(y,F)\,dt=\frac{1}{\lambda}$

donc

$$\mu(F)=\mu(F)+\lambda\int_{F^c}\mu(dy)\,U^\lambda(y,F)$$

comme F est stable, F est un ouvert fin et comme $F\supseteqq\boldsymbol{C}$ d'après la proposition IV.4. de [1], $U^\lambda(y,F)$ est strictement positif pour tout y de $\boldsymbol{D}$, ce qui exige $\mu(F^c)=0$.

I.5. Cette proposition va nous permettre de généraliser légèrement deux résultats de [1].

Corollaire 1. *Toute fonction excessive est égale* μ*-presque surement à la valeur qu'elle prend sur* $\boldsymbol{C}$. *Toute fonction invariante et bornée est constante surement sur* $\boldsymbol{D}$.

Démonstration. Si f est excessive et bornée d'après [1] elle est égale sur $\boldsymbol{C}$ à une constante a

Si $x\in\boldsymbol{D}\setminus\boldsymbol{C}$, $f(x)\geqq a$, car la surmartingale positive $\{\Omega,\mathscr{F}_s,f_0X_s,P_x\}$ tend P_x-presque surement vers a, ce qui entraine

$$f(x)\geqq P_tf(x)=E_x[f_0X_t]\underset{t\to\infty}{\to}a$$

Posons

$$F=\{x\in\boldsymbol{D}: f(x)=a\}$$

$$\forall x\in F\quad \forall s\in\mathbb{R}_+\quad a=f(x)\geqq E_x[f_0X_s]\geqq a.$$

Donc

$$\forall s\in\mathbb{R}_+\quad f_0X_s=a\quad P_x-\text{p.s.}.$$

F est un ensemble stable. Il résulte de la proposition I.3. que $f(x)=a$ μ-presque surement.

Pour traiter le cas général, on considère les fonctions excessives $f \wedge n$ et on leur applique le raisonnement précédent; on constate que si f est infinie sur $\boldsymbol{C}$ elle est surement infinie sur $\boldsymbol{D}$.

La deuxième assertion du corollaire découle immédiatement du théorème des martingales.

Avant d'énoncer le corollaire suivant, rappelons qu'on appelle fonctionnelle additive du processus une famille $\{A_t\}_{t \in R_+}$ de variables aléatoires sur Ω telles que

1. Quelle que soit la mesure initiale ν la fonction $t \to A_t(\omega)$ est P_ν — p.s. positive, croissante, continue à droite et nulle à l'instant 0;

2. Pour tout $t \geqq 0$, A_t est $\mathscr{F}_t$-mesurable;

3. Pour chaque couple (s, t);

$$A_{s+t}(\omega) = A_s(\omega) + A_t(\theta_s(\omega)) \qquad P_\nu - \text{p.s.}.$$

Si f est une fonction borélienne positive et $A = \{A_t\}_{t \in R_+}$ une fonctionnelle additive on appellera fA la fonctionnelle additive

$$(fA)_t = \int_0^t f(X_s)\, dA_s .$$

Corollaire 2. *Etant donnée une fonctionnelle additive A ou bien pour tout x de $\boldsymbol{D}$, $P_x[A_\infty = \infty] = 1$ ou bien pour tout x de $\boldsymbol{C}$ et μ-presque surement sur $\boldsymbol{D}$, $P_x[A_\infty = 0] = 1$. Dans le second cas si A_t est finie pour tout t P_x-presque surement pour un x de $\boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{C}$, alors $P_x[A_\infty < \infty] = 1$.*

Démonstration. Ceci est une légère généralisation de la proposition IV.4. de [1]. Il reste à montrer que si $P_x[A_\infty = 0] = 1$ pour tout x de $\boldsymbol{C}$, cette relation est vraie μ-presque surement sur $\boldsymbol{D}$. Ceci résulte du corollaire 1 et du fait que la fonction $x \to E_x[A_\infty]$ est excessive.

Remarques. 1. Ce résultat a déjà été utilisé deux fois dans ce qui précède et sera utilisé constamment dans la suite. Il entraine notamment que si pour un x de $\boldsymbol{C}$ et un $\lambda > 0$ $U^\lambda(x, A) > 0$ alors $P_x\left[\int_0^\infty 1_A(X_s)\, ds = \infty\right] = 1$ pour tout x de $\boldsymbol{D}$. Nous utiliserons désormais ce résultat sans le rappeler.

2. Sur une classe conservative $\boldsymbol{D}$, pour la mesure μ invariante concentrée sur $\boldsymbol{D}$, on se trouve dans les hypothèses que Hunt place au début de [8].

I.6. Théorème. *La mesure invariante μ est équivalente à $U^\lambda(x, .)$ quel que soit x dans $\boldsymbol{C}$ et $\lambda > 0$.*

Démonstration. Il reste à montrer que si $A \in \mathscr{B}_D$, $\mu(A) > 0$ entraine $U^\lambda(x, A) > 0$. Or $\mu(A) > 0$ entraine $\lambda \mu U^\lambda(A) > 0$.

Il existe donc un ensemble B de μ-mesure positive tel que pour tout x de B, $U^\lambda(x, A) > 0$. On ne peut donc être que dans le premier terme de l'alternative du corollaire 2 ci-dessus.

I.7. Proposition. *μ est l'unique mesure excessive σ-finie non nulle concentrée sur $\boldsymbol{D}$.*

Démonstration. Soit ν une telle mesure excessive. μ et ν étant σ-finies, $\boldsymbol{D}$ est réunion dénombrable d'ensembles A_n intégrables pour μ et ν. Soit A un de ces ensembles tel que $\mu(A) > 0$.

Posons: $f(x) = \int_0^a P_s(x, A)\,ds$; f est ν-intégrable, en effet

$$\int f\,d\nu = \langle \nu, f \rangle = \int \nu(dx) \int_0^a P_s(x, A)\,ds \leqq a\,\nu(A) < \infty$$

et d'autre part:

$$\sum_{n \geqq 0} P_{na} f(x) = U(x, A) = \infty \qquad \forall x \in D.$$

Formons alors

$$\langle \nu - \nu P_a, \sum_{m<n} P_{ma} f \rangle = \langle \nu, f \rangle - \langle \nu P_{na}, f \rangle \leqq a\,\nu(A).$$

Faisons tendre n vers l'infini il vient

$$\langle \nu - \nu P_a, U(., A) \rangle \leqq a\,\nu(A) \quad \text{ce qui entraine} \quad \nu = \nu P_a.$$

II. Théorèmes ergodiques

II.0. L'existence de la mesure invariante permet de démontrer des théorèmes ergodiques pour les fonctionnelles additives du processus. Ces théorèmes relient le temps de séjour dans les ensembles presque-boréliens à la mesure de ces ensembles.

Dans tout ce paragraphe les hypothèses sont les mêmes qu'au paragraphe I. Nous considérons l'espace $\mathscr{L}^1(\boldsymbol{D}, \mathscr{B}_D, \mu)$ des fonctions intégrables pour la mesure invariante μ, et l'espace $L^1(D, \mathscr{B}_D, \mu)$ de leurs classes d'équivalence que nous noterons $\mathscr{L}^1(\mu)$ et $L^1(\mu)$. Nous poserons $\langle \mu, f \rangle = \int f\,d\mu$.

Remarquons que si $A = \{A_t\}$ est une fonctionnelle additive du processus, la fonction $t \to E_\mu[A_t]$ est linéaire. Nous poserons

$$E_\mu[A_t] = t\,k(A).$$

Définition. *Si $k(A)$ est fini la fonctionnelle A sera dite intégrable. Si E est réunion d'une suite d'ensemble E_n tels que les fonctionnelles $1_{E_n} A$ soient intégrables, A sera dite σ-intégrable.*

II.1. Théorème de Chacon-Ornstein. Théorème. *Soient A et B des fonctionnelles additives intégrables telles que $k(B) > 0$, alors*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E_x A_t}{E_x B_t} = \frac{k(A)}{k(B)} \quad \mu - \text{p.s.}$$

Démonstration. a) Soit a un nombre positif. L'opérateur $f \to P_a f$ est une contraction positive de $L^1_+(\mu)$. On sait (cf. [12]) qu'il existe pour P_a une partie dite conservative définie à une μ-équivalence près et telle que pour tout élément de $L^1_+(\mu)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (P_a)^n f = 0 \quad \text{ou} \quad +\infty.$$

Soit F un ensemble de mesure finie et positive et posons

$$f(x) = \int_0^a P_s(x, F)\, ds;$$

f est un élément de $\mathscr{L}^1_+(\mu)$ et pour tout x de D on a:

$$\sum_{n \geqq 0} (P_a)^n f(x) = U(x, F) = +\infty;$$

P_a est donc conservatif sur $\boldsymbol{D}$. Ceci justifie le nom de "classe conservative" donné à l'ensemble $\boldsymbol{D}$.

b) On peut donc appliquer le théorème de CHACON-ORNSTEIN à P_a et aux classes des fonctions $E_x A_a$ et $E_x B_a$; il suffit en effet pour cela (cf. [12]) que

$$\boldsymbol{D} = \left\{x: \sum_{n=0}^{\infty} (P_a)^n (E_x B_a) = \infty\right\};$$

or

$$\sum_{n=0}^{\infty} (P_a)^n (E_x B_a) = \sum_{n=0}^{\infty} E_x (B_a \circ \theta_n) = E_x[B_\infty]$$

et l'hypothèse $k(B) > 0$ entraine que $B_\infty = \infty\ P_x$ — p.s. pour tout x de $\boldsymbol{D}$.

Donc pour tout $a > 0$, μ-p.s.:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E_x(A_{na})}{E_x(B_{na})} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathscr{I}_a} E_x A_a}{\mathfrak{M}^{\mathscr{I}_a} E_x B_a} < \infty$$

où $\mathscr{I}_a$ désigne la tribu engendrée par les fonctions boréliennes bornées invariantes par P_a^*, l'opérateur transposé de P_a, et $\mathfrak{M}^{\mathscr{I}_a}$ l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathscr{I}_a$.

c) Supposons que $B_t = \int_0^t 1_F(X_s)\, ds$, pour un ensemble F, tel que $0 < \mu(F) < \infty$.

Soit x un point de $\boldsymbol{D}$ tel que la limite de $\frac{E_x A_n}{E_x B_n}$ quand n tend vers l'infini existe et soit finie.

Posons $\alpha(t) = E_x A_t$ et $\beta(t) = E_x B_t$ et appelons $[t]$ la partie entière de t

$$1 \leqq \frac{\beta([t]+1)}{\beta([t])} = \frac{\int_0^{[t]+1} P_s(x, F)\, ds}{\int_0^{[t]} P_s(x, F)\, ds}$$

donc

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\beta([t]+1)}{\beta([t])} = 1.$$

Alors:

$$\frac{\beta([t])}{\beta([t])} \frac{\alpha([t])}{\beta([t]+1)} \leqq \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \leqq \frac{\alpha([t]+1)}{\beta([t])} \frac{\beta([t]+1)}{\beta([t]+1)}$$

d'où

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\alpha(n)}{\beta(n)}.$$

Pour μ-presque-tout x, la limite de

$\dfrac{E_x A_t}{\int_0^t P_s(x F)\, ds}$ existe donc. Elle coincide pour tout $a > 0$ avec

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_x A_{na}}{\int_0^{na} P_s(x, F)\, ds} \text{ qui est } \mathscr{I}_a\text{-mesurable.}$$

Elle est donc $\mathscr{I}_a$-mesurable, pour tout a.

Mais $\bigcap_{a>0} \mathscr{I}_a$ est grossière. En effet si h est un élément de $L^\infty(\mu)$, $\bigcap_{a>0} \mathscr{I}_a$-mesurable, $P_a^* h = h$ pour tout a et $h\mu$ est une mesure invariante; $h\mu$ est alors proportionnelle à μ d'après le théorème I.2. et h est constante. D'où μ-p.s.:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E_x A_t}{\int_0^t P_s(x, F)\, ds} = \frac{E_\mu A_t}{\int_0^t \mu P_s(F) ds} = \frac{k(A)}{\mu(F)}.$$

Le théorème en résulte car μ-p.s.:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E_x A_t}{E_x B_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E_x A_t}{\int_0^t P_s(x F)\, ds} \frac{\int_0^t P_s(x F)\, ds}{E_x B_t} = \frac{k(A)}{k(B)}.$$

II.2. Théorème de Birkhoff. Lemme. *Soit Z une variable aléatoire $\mathscr{F}_\infty$-mesurable, bornée, telle que:*

$$\forall a \in R_+ \quad Z \circ \theta_a = Z$$

P_μ-presque surement, alors Z est constante P_μ-presque surement.

Démonstration. Soit ν une probabilité équivalente à μ. On a:

$$E_{X_t}[Z] = E_\nu[Z \circ \theta_t \,|\, \mathscr{F}_t] = E_\nu[Z \,|\, \mathscr{F}_t].$$

Donc d'après un théorème de la théorie des martingales ([12]) Z étant bornée donc P_ν-intégrable

$$E_{X_t}[Z] \underset{t\to\infty}{\to} Z \qquad P_\nu - \text{p.s.};$$

soit alors k un nombre réel et

$$F_k = \{y \in D, \quad E_y[Z] \geqq k\};$$

ou bien $\nu(F_k) > 0$ et alors

$$P_\nu\left[\int_0^\infty 1_{F_k}(X_s)\, ds = \infty\right] = 1,$$

soit

$$\overline{\lim}\, E_{X_t}[Z] \geqq k \qquad P_\nu - \text{p.s.},$$

donc

$$\lim E_{X_t}[Z] \geqq k \qquad P_\nu - \text{p.s.};$$

ou bien $\nu(F_k^c) = 1$ et de la même façon

$$Z < k \qquad P_\nu - \text{p.s.}.$$

Les ensembles négligeables étant les mêmes pour P_ν et P_μ, Z est constante P_μ-presque surement.

Théorème. *Etant données deux fonctionnelles additives intégrables A et B telles que $k(B) > 0$, pour tout x de* $\mathbf{D}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A_t}{B_t} = \frac{k(A)}{k(B)} \quad P_x - ps\,.$$

Démonstration. L'opérateur T_a:

$$Z \to Z_0 \theta_a$$

est une contraction positive de $L^1(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P_\mu)$.

Soit en effet la variable aléatoire:

$$Z = \int_0^a 1_F(X_s)\,ds \qquad\qquad a \in \mathbb{R}_+$$

où F est un ensemble presque-borélien tel que $0 < \mu(F) < \infty$;

$$\sum_{n=0}^{\infty} (T_a)^n Y = \int_0^{\infty} 1_F(X_s)\,ds = \infty \qquad P\mu\text{-presque surement;}$$

T_a est donc conservative.

En vue d'appliquer le théorème de Chacon-Ornstein à cette contraction montrons que la σ-algèbre $\mathscr{I}_a$ des éléments invariants par l'opérateur transposé T_a^* coïncide avec la σ-algèbre $\mathscr{I}_a'$ des ensembles invariants par $\theta_a P_\mu$-presque-surement.

T_a^* est défini par la relation:

$$\forall Z \in L^1(P_\mu) \quad E_\mu[Z \circ \theta_a \cdot Y] = E_\mu[Z \cdot T_a^* Y]\,.$$

Donc

$$\forall Z \in L^1(P_\mu) \quad E_\mu[Z \circ \theta_a\, Y \circ \theta_a] = E_\mu[Z \cdot T_a^*[Y \circ \theta_a]]\,,$$

et d'autre part:

$$\forall Z \in L^1(P_\mu) \quad E_\mu[Z \circ \theta_a\, Y \circ \theta_a] = E_\mu[YZ]\,.$$

Donc:

$$\forall Y \in L^\infty(P_\mu) \quad Y = T_a^*[Y \circ \theta_a]\,,$$

ce qui montre que $\mathscr{I}_a' \subset \mathscr{I}_a$.

Inversement, on sait ([13]) que la σ-algèbre $\mathscr{I}_a$ des évènements invariants par T_a^* est formée des ensembles

$$C_Z = \left\{ \sum_0^\infty (T_a)^n Z = \infty \right\} \quad \text{où } Z \text{ parcourt } L'(P_\mu);$$

$$C_Z = \left\{ \sum_0^\infty Z \circ \theta_{na} = \infty \right\},$$

C_Z est invariant par θ_a, donc $\mathscr{I}_a \subset \mathscr{I}_a'$.

Il résulte alors du lemme que:

$$\bigcap_{a>0} \mathscr{I} = \{\Phi, \Omega\} \qquad P_\mu\text{-presque surement}\,.$$

Appliquons maintenant le théorème de CHACON-ORNSTEIN a la contraction T_a et aux variables aléatoires A_a et B_a: Il vient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{na}}{B_{na}} = \frac{E_\mu \mathscr{I}_a[A_a]}{E_\mu \mathscr{I}_a[B_a]} \; P_\mu\text{-presque surement.}$$

En procédant de la même manière qu'au paragraphe II-1, on peut se limiter au cas où $B_t = \int\limits_0^t 1_F(X_s)ds$ avec $0 < \mu(F) < \infty$.

Dans ce cas on montre que $\lim \frac{A_t}{B_t}$ existe, donc qu'elle est $\mathscr{I}_a$-mesurable pour tout a positif. Cette limite est donc constante et égale à $\frac{k(A)}{k(B)}$ P_μ-presque-surement.

Soit maintenant F le sous ensemble de Ω où la convergence a lieu:

$$F = \left\{\omega \,\Big|\, \lim_{t\to\infty} \frac{A_t(\omega)}{B_t(\omega)} = \frac{k(A)}{k(B)}\right\}.$$

On a $P_\mu(F^c) = 0$. D'autre part $1_F \circ \theta_t = 1_F$. La fonction

$x \to P_x[F]$ est donc invariante et par suite constante.

Il en résulte que $P_x(F) = 1$ pour tout x de $\boldsymbol{D}$.

Remarques. 1) Soient f une fonction de $\mathscr{L}^1(\mu)$ et g une fonction de $\mathscr{L}^1_+(\mu)$ telle que $\langle\mu, g\rangle > 0$; les théorème II.1 et II.2. impliquent que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_0^t P_s f(x)\,ds}{\int\limits_0^t P_s g(x)\,ds} = \frac{\langle\mu, f\rangle}{\langle\mu, g\rangle} \qquad \mu - \text{p.s.}$$

et que pour tout x de $\boldsymbol{D}$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_0^t f\circ X_s\,ds}{\int\limits_0^t g\circ X_s\,ds} = \frac{\langle\mu, f\rangle}{\langle\mu, g\rangle} \qquad P_x - \text{p.s.}$$

2) La démonstration des théorèmes II.1 et II.2 s'applique à des fonctionnelles A qui ne possèdent pas la propriété que A_t soit $\mathscr{F}_t$-mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. On peut donc les appliquer aux fonctionnelles ZA définies par

$$(ZA)_t = \int\limits_0^t Z\circ\theta_s\,dA_s$$

où Z est une variable aléatoire $\mathscr{F}_\infty$-mesurable, positive et bornée et A_s une fonctionnelle additive intégrable.

II.3. A étant une fonctionnelle additive et φ une fonction borélienne positive, on désigne par φA la fonctionnelle additive

$$(\varphi A)_t = \int\limits_0^t \varphi\circ X_s\,dA_s$$

on associe à A une mesure ν_A en posant

$$\langle\nu_A, \varphi\rangle = k(\varphi A).$$

La mesure ν_A est finie si et seulement si A est intégrable. Elle est σ-finie si et seulement si A est σ-intégrable. La mesure ν_A ne charge pas les ensembles polaires. Si A est continue ν_A ne change pas les ensembles semi-polaires (en effet l'ensemble des temps où une trajectoire rencontre un tel ensemble est dénombrable).

Proposition. *Si A est σ-intégrable, continue, et si $\tau(t)$ désigne le changement de temps associé à A* (cf. [10]), *la mesure ν_A est invariante par $P_{\tau(t)}$ et c'est la seule mesure excessive pour $P_{\tau(t)}$ concentrée sur $\boldsymbol{D}$.*

Remarque. Si f est une fonction de $\mathscr{L}^1_+(\mu) \cup \mathscr{L}^\infty_+(\mu)$ et si

$$A_t = \int_0^t f \circ X_s ds ,$$

on a $\nu_A = f\mu$. La proposition précédente est dans ce cas partiellement énoncée par Hunt dans [8].

Démonstration. 1°) Supposons d'abord A intégrable. Pour toute fonction φ de $\mathscr{L}^\infty_+(\mu)$ et tout x de $\boldsymbol{D}$, d'après le théorème II.2

$$P_x\left[\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \varphi(X_s)\,dA_s}{A_t} = \frac{\langle \nu_A, \varphi\rangle}{\|\nu_A\|}\right] = 1$$

et comme $\tau(t)$ tend P_x — p, s. vers l'infini pour tout x de D

$$P_x\left[\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^{\tau(t)} \varphi(X_s)\,dA_s}{A_{\tau(t)}} = \frac{\langle \nu_A, \varphi\rangle}{\|\nu_A\|}\right] = 1$$

soit

$$P_x\left[\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi\,(X_{\tau(s)})ds = \frac{\langle \nu_A, \varphi\rangle}{\|\nu_A\|}\right] = 1\,.$$

Mais pour tout u de $\mathbb{R}_+$, $P_{\tau(u)}\,\varphi$ est encore une fonction mesurable bornée, donc pour tout x de $\boldsymbol{D}$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t P_{\tau(s)}\,[P_{\tau(u)}\,\varphi](x)\,ds = \frac{\langle \nu_A, P_{\tau(u)}\,\varphi\rangle}{\|\nu_A\|},$$

et le premier membre est aussi égal à:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t P_{\tau(s)}\,\varphi(x)\,ds = \frac{\langle \nu_A, \varphi\rangle}{\|\nu_A\|};$$

ν_A est donc invariante par $P_{\tau(t)}$.

2°) Soit Z une variable aléatoire positive et bornée et ZA la fonctionnelle définie précédemment par

$$(ZA)_t = \int_0^t Z \circ \theta_s dA_s\,.$$

Nous allons montrer que $k(ZA) = E_{\nu_A}[Z]$.

Si A est intégrable, ZA est intégrable et pour tout x de $\boldsymbol{D}$

$$P_x\left[\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t Z\circ\theta_s\,dA_s}{A_t}=\frac{k(ZA)}{\|\nu_A\|}\right]=1\,,$$

soit

$$P_x\left[\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Z\circ\theta_{\tau(s)}\,ds=\frac{k(ZA)}{\|\nu_A\|}\right]=1\,,$$

et ν_A étant invariante par $P_{\tau(t)}$

$$\frac{1}{t}E\nu_A\left[\int_0^t Z\circ\theta_{\tau(s)}\,ds\right]=E_{\nu_A}[Z]=k(ZA)\,.$$

Si A est σ-intégrable, E est limite croissante d'ensembles E_n tels que $1_{E_n}A$ soit intégrable:

$$\begin{aligned}k(ZA)&=\frac{1}{t}E_\mu\left[\int_0^t Z\circ\theta_s dA_s\right]=\lim_n\frac{1}{t}E_\mu\left[\int_0^t Z\circ\theta_s 1_{E_a}|(X_s)dA_s\right]\\&=\lim_n E_{1_{E_n}\nu_A}[Z]=E_{\nu_A}[Z]\,.\end{aligned}$$

Donc pour toute variable aléatoire Z positive P_{ν_A}-intégrable et tout x de $\boldsymbol{D}$:

$$P_x\left[\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t Z\circ\theta_s\,dA_s}{\int_0^t 1_{E_n}(X_s)\,dA_s}=\frac{E\nu_A[Z]}{\nu_A(E_n)}\right]=1\,,$$

soit

$$P_x\left[\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t Z\circ\theta_{\tau(s)}\,ds}{\int_0^t 1_{E_n}(X_{\tau(s)})\,ds}=\frac{E_{\nu_A}[Z]}{\nu_A[E_n]}\right]=1\;;$$

et en raisonnant comme précédemment, pour tout nombre u positif et tout x de $\boldsymbol{D}$, P_x-presque-surement,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t Z\circ\theta_{\tau(s)}\,ds}{\int_0^t 1_{E_n}(X_{\tau(s)})\,ds}=\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t Z\circ\theta_{\tau(u)}\circ\theta_{\tau(s)}\,ds}{\int_0^t 1_{E_n}(X_{\tau(s)})\,ds},$$

soit

$$\frac{E_{\nu_A}(Z)}{\nu_A(E_n)}=\frac{E_{\nu_A}(Z\circ\theta_{\tau(u)})}{\nu_A(E_n)}.$$

La mesure $P_{\nu A}$ est donc invariante par $\theta_{\tau(u)}$ donc ν_A est invariante par $P_{\tau(u)}$.

3°) Si $\nu_A(\Gamma)$ est strictement positif pour un ensemble Γ de $\mathscr{B}_D$, cela entraine que

$$\frac{1}{t}E_\mu\left[\int_0^t 1_\Gamma(X_s)\,dA_s\right]>0\,,$$

et d'après le corollaire I.4.2 que pour tout x de $\boldsymbol{D}$

$$P_x\left[\int_0^\infty 1_\Gamma(X_s)\,dA_s = \infty\right] = P_x\left[\int_0^\infty 1_\Gamma(X_{\tau(s)})\,ds = \infty\right] = 1\,.$$

Soit alors ξ une mesure σ-finie excessive pour le semi-groupe $P_{\tau(t)}$, on démontre que $\nu_A \ll \xi$ et que $P_{\tau(t)}$ est une contraction positive et conservative de $L^1(\mu)$ en suivant les mêmes raisonnements que ceux faits précédemment.

Soit alors Γ un ensemble de $\mathscr{B}_D$ tel que $0 < \nu_A(\Gamma) < \infty$ et $\xi(\Gamma) < \infty$, on a pour toute fonction bornée φ de $L^1_+(\xi)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^n P_{\tau(s)}\,\varphi(x)\,ds}{\int_0^{nt} P_{\tau(s)}(x,\Gamma)\,ds} = \frac{\langle \nu_A, \varphi\rangle}{\nu_A(\Gamma)} = \frac{E^{\mathscr{C}}\varphi}{E^{\mathscr{C}}1_\Gamma}$$

où $\mathscr{C}$ est une certaine tribu sur $\boldsymbol{D}$ et $E^{\mathscr{C}}$ l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathscr{C}$ relativement à ξ. Il en résulte que

$$\frac{\langle \nu_A, \varphi\rangle}{\langle \xi, \varphi\rangle} = \text{cste}\,.$$

Donc ξ est proportionnelle à ν_A.

R e m a r q u e. La troisième partie de cette démonstration pourrait se faire par application des raisonnements du paragraphe I. La remarque faite au début permettrait de démontrer l'existence d'une mesure invariante pour $P_{\tau(t)}$ par application du théorème de Harris et l'on pourrait ensuite reprendre l'alinéa I.7.

III. Classes conservatives nulles et positives

III.0. Dans la théorie des chaines à espace d'états discret on distingue les classes récurrentes en classes nulles et classes positives suivant que la mesure invariante est infinie ou finie. Ceci est lié aux propriétés de convergence à l'infini des fonctions de transition et à l'intégrabilité des temps de retour. Nous allons montrer deux résultats dans cette direction.

III.1. Definition. *Une classe conservative* $\boldsymbol{D}$ *sera dite positive si la mesure invariante concentrée sur* $\boldsymbol{D}$ *est finie. Elle sera dite nulle dans le cas contraire.*

Nous conviendrons de prendre 1 pour masse totale de μ, lorsque $\boldsymbol{D}$ est positive.

Proposition. 1) $\boldsymbol{D}$ *est positive si et seulement si pour* μ *presque tout* x *de* $\boldsymbol{D}$ *et toute fonctionnelle* A *intégrable*

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda\, U_A^\lambda(x) = \|\nu_A\|\,.$$

2) $\boldsymbol{D}$ *est nulle si et seulement si pour toute fonctionnelle* A *intégrable,* μ-p. s.

a) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} E_x A_t = 0\,;$

b) $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda\, U_A^\lambda(x) = 0\,.$

Démonstration. 1) le théorème II.1 entraine que si $\boldsymbol{D}$ est positive

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E_x A_t = \| \nu_A \| \qquad \mu\text{-p.s.};$$

donc d'après le théorème de Karamata (cf. [14])

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda E_x \left(\int_0^\infty e^{-\lambda s} dA_s \right) = \| \nu_A \|$$

soit

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda U_A^\lambda(x) = \| \nu_A \| \qquad \mu\text{-p.s.};$$

2) supposons maintenant $\boldsymbol{D}$ nulle. Il existe une suite croissante (D_n) d'ensembles de $\mathscr{B}_D$, de mesure finie, tels que $\cup D_n = \boldsymbol{D}$. Pour tout n et tout t:

$$\frac{1}{t} E_x A_t \leqq \frac{E_x A_t}{E_x \int_0^t 1_{D_n}(X_s)\, ds}$$

et:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} E_x A_t \leqq \frac{\| \nu_A \|}{\mu(D_n)} \quad \mu\text{-p.s.};$$

d'où

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E_x A_t = 0 \qquad \mu\text{-p.s.}$$

L'équivalence de a) et b) résulte du théorème de Karamata. Les conditions 1) et 2) étant incompatibles sont nécessaires et suffisantes.

III.2. Proposition. *Soient A et B deux ensembles de $\mathscr{B}_D$ tels que $\mu(A) < \infty$ et $\mu(B) > 0$. Si $T_B = \inf\{t > 0, X_t \in B\}$ est le temps d'entrée dans B,*

$$E_x \int_0^{T_B} 1_A(X_s)\, ds < \infty \qquad \mu\text{-p.s.}$$

En particulier, si $\boldsymbol{D}$ est une classe positive

$$E_x(T_B) < \infty \qquad \mu\text{-p.s.}$$

Démonstration. On ne restreint pas la généralité en supposant $\mu(B) < \infty$: si en effet $\mu(B) = \infty$, B contient un ensemble B' de $\mathscr{B}_D$ tel que $0 < \mu(B') < \infty$ et

$$E_x \int_0^{T_B} 1_A(X_s)\, ds \leqq E_x \int_0^{T_{B'}} 1_A(X_s)\, ds.$$

a) Supposons donc $\mu(B) < \infty$. Soit $\tau(t)$ le changement de temps associé à $A_t = \int_0^t 1_{A\cup B}(X_s)\, ds$. La mesure bornée $\tilde{\mu} = 1_{A\cup B}\,\mu$ est invariante par $P_{\tau(t)}$. Le processus $\{\Omega, \mathscr{F}, (P_x)_{x\in D}, \theta_{\tau(t)}, X_{\tau(t)}\}$ a $P_{\tau(t)}$ pour fonction de transition. Avec les notations de la partie I.2. supposons que F soit la loi exponentielle de paramètre 1 et remplaçons P_t par $P_{\tau(t)}$. La chaine de Markov associée est

$$Y = \{\tilde{\Omega} = \Omega \otimes \Lambda, \quad \tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \otimes \mathscr{G}, \quad \tilde{P}_x = P_x \otimes \pi_0, \qquad Y_n(\omega, \lambda) = X_{\tau[T_n^{(\omega)}(\lambda)]}\}.$$

Pour un ensemble B de $\mathscr{B}_D$ on pose:

$$\tilde{T}_B = \inf\{n > 0,\ Y_n \in B\}.$$

Si $\tilde{\mu}(B) > 0$, on a vu que $\int_0^\infty 1_B(X_{\tau(t)})\,dt = \infty$ P_x-presque surement pour tout x de $\boldsymbol{D}$, en recommencant le raisonnement fait en I.3. on montre que la chaine Y est récurrente dans l'ensemble B donc que $\tilde{T}_B$ est P_x-presque surement fini pour tout x de $\boldsymbol{D}$.

D'autre part d'après [6] si $C \in \mathscr{B}_D$

$$\tilde{\mu}(C) = \int_B \tilde{\mu}(dx)\tilde{E}_x\left[\sum_{n=1}^{\tilde{T}_B} 1_C(Y_n)\right]$$

en prenant $C = \boldsymbol{D}$, il vient

$$\int_B \tilde{\mu}(dx)\tilde{E}_x[\tilde{T}_B] = \tilde{\mu}(\boldsymbol{D}) < \infty,$$

ce qui entraine $\tilde{E}_x[\tilde{T}_B] < \infty$ μ-presque surement sur B.

Posons maintenant $F = \{y; \tilde{E}_y(\tilde{T}_B) = \infty\}$; d'après ce qui précède $\tilde{\mu}\,(F \cap B) = 0$, et supposons $\tilde{\mu}(F) > 0$.

Comme

$$\tilde{\mu}(F) = \int_B \tilde{\mu}(dx)\tilde{E}_x\left[\sum_1^{\tilde{T}_B} 1_F(Y_n)\right],$$

cela entraine

$$\tilde{\mu}\{x \in B\,;\quad \tilde{P}_x(\tilde{T}_B > \tilde{T}_F) > 0\} > 0$$

car $\forall x \in D$ $\tilde{P}_x[\tilde{T}_B = \tilde{T}_F] = 0$
et

$$\begin{aligned}\tilde{E}_x(\tilde{T}_B) &\geqq \tilde{E}_x[1_{(\tilde{T}_B > \tilde{T}_F)}\tilde{T}_B] \geqq \\ &\geqq \tilde{E}_x[(\tilde{T}_F + \tilde{T}_B \circ \tilde{\theta}_{\tilde{T}_F})1_{(\tilde{T}_B > \tilde{T}_F)}] \quad \text{où} \quad \tilde{\theta}_n(\omega, \lambda) = (\omega, \xi_n(\lambda)) \\ &= \tilde{E}_x[\tilde{T}_F 1_{(\tilde{T}_B > \tilde{T}_F)}] + \tilde{E}_x[1_{(\tilde{T}_B > \tilde{T}_F)}\tilde{E}_{Y_{\tilde{T}_F}}(\tilde{T}_B)];\end{aligned}$$

et comme $\tilde{E}_{Y_{\tilde{T}_F}}(\tilde{T}_B) = \infty$, cela entraine l'existence d'un sous-ensemble de B de mesure positive sur lequel $\tilde{E}_x(\tilde{T}_B) = \infty$. Nous sommes arrivés à une contradiction et

$$\tilde{E}_x(\tilde{T}_B) < \infty \qquad \tilde{\mu} \text{ p.s.}$$

b) Soit $\hat{T}_B = \inf\{t; X_{\tau(t)} \in B\}$ le temps d'entrée du processus $X_{\tau(t)}$ dans B.

$$\hat{T}_B \geqq \inf\{t : \tau_{(t)} \geqq T_B\} = A_{T_B},$$

$$\hat{T}_B \geqq \int_0^{T_B} 1_A(X_u)\,du.$$

Pour tout λ:

$$T_{\tilde{T}_B(\omega,\lambda)} \geqq \hat{T}_B(\omega)$$

donc $E_x[T_{\tilde{T}_B(\omega,\lambda)}] \geqq E_x(\hat{T}_B)$.

Mais ω étant fixé, $\tilde{T}_B(\omega, \lambda)$ est un temps d'arrêt du processus $T_n(\lambda)$. Comme $T_n - n$ est une martingale centrée, pour tout entier k:

$$\int d\pi_0(\lambda)[T_{\tilde{T}_B \wedge k} - \tilde{T}_B \wedge k] = 0\,,$$

soit:

$$\int d\pi_0(\lambda)\, T_{\tilde{T}_B(\omega,\lambda)}(\lambda) = \int d\pi_0(\lambda)\, \tilde{T}_B(\omega, \lambda)$$
$$\geqq \hat{T}_B(\omega).$$

Donc μ p.s. sur $A \cup B$:

$$E_x\left[\int_0^{T_B} 1_A(X_s)\,ds\right] \leqq E_x(\hat{T}_B) \leqq \tilde{E}_x[\tilde{T}_B] < \infty\,.$$

c) $\boldsymbol{D}$ est réunion dénombrable d'ensembles A_n de mesure finie et pour tout n:

$$E_x \int_0^{T_B} 1_A(X_s)\,ds \leqq E_x \int_0^{T_B} 1_{A \cup A_n}(X_s)\,ds < \infty \qquad \mu \text{ p.s. sur } A \cup A_n\,,$$

donc

$$E_x \int_0^{T_B} 1_A(X_s)\,ds < \infty \qquad \mu \text{ p.s.}$$

III.3. Pour l'étude de la limite de $P_t(x, A)$ lorsque t tend vers l'infini ($x \in \boldsymbol{D}$ et $A \in \mathscr{B}_D$ de mesure finie), nous n'avons que le résultat suivant:

Si les fonctions $\overline{\lim}_{t\to\infty} P_t(\cdot, A)$ et $\underline{\lim}_{t\to\infty} P_t(\cdot, A)$ sont universellement mesurables (en particulier si A est un ouvert fin presque-borélien), elles sont constantes μ p.s. sur D.

Rappelons qu'une fonction surmédiane est une fonction universellement mesurable positive φ, telle que pour tout t de $\mathbb{R}^+$ $P_t\varphi \leqq \varphi$.

Les fonctions $\underline{\lim}\, P_t(\cdot, A)$ et $1 - \overline{\lim}\, P_t(\cdot, A)$ sont surmédianes et le résultat précédent est une conséquence de la

Proposition. *Sur $\boldsymbol{D}$ toute fonction surmédiane est constante, μ-presque-surement.*

Démonstration. On peut supposer la fonction surmédiane φ bornée (sinon elle est limite croissante des fonctions surmédianes bornées $\varphi \wedge n$).

Soient A presque-borélien tel que $\mu(A) < \infty$ et $\tau(t)$ le changement de temps associé à $\int_0^t 1_A(X_s)\,ds$. Pour tout t, $\tau(t) \geqq t$ et

$$P_{\tau(t)}\varphi \leqq P_t\varphi \leqq \varphi$$
$$\lim_{t\to 0} P_{\tau(t)}\varphi \leqq \lim_{t\to 0} P_t\varphi = \tilde{\varphi} \leqq \varphi\,.$$

Mais pour tout t:

$$\int_A \mu(dx)[\varphi - P_{\tau(t)}\varphi](x) = 0\,,$$

donc

$$\int_A \mu(dx)[\varphi - \tilde{\varphi}](x) = 0$$

et $\varphi = \tilde{\varphi}$ μ p.s. sur A.

μ étant σ-finie et ceci étant vrai pour tout A de μ mesure finie,

$$\varphi = \tilde{\varphi} \quad \mu \text{ p.s. sur } \boldsymbol{D};$$

φ coïncide p.s. avec sa régularisée excessive $\tilde{\varphi}$ qui est constante μ-presque surement; φ est donc constante μ p.s.

IV. Récurrence fine des processus en dualité

IV.0. L'existence et les propriétés de la mesure invariante permettent de préciser sous l'hypothèse supplémentaire de dualité les propriétés de la récurrence fine étudiée dans [1].

Dans tout ce paragraphe on supposera donnés deux processus X et $\hat{X}$ "en dualité" (cf. [2]). Conformément à la terminologie de Meyer les objets associés au processus $\hat{X}$ seront précédés du préfixe co ou surmontés du signe $\hat{}$. On a alors une mesure ξ (notée aussi dx) et une famille de noyaux-fonctions $\{U^\lambda(x, y)\}_{\lambda>0}$ tels que:

1°) ξ est excessive pour les semi-groupes P_t et $\hat{P}_t$;

2°) $U^\lambda(x, dy) = U^\lambda(x, y)\,dy$,
$\hat{U}^\lambda(dx, y) = dx\, U^\lambda(x, y)$;

3°) la fonction $x \to U^\lambda(x, y)$ (resp $y \to U^\lambda(x, y)$) est λ excessive (resp λ-coexcessive).

Sous ces hypothèses ξ charge les ouverts fins et cofins; l'hypothèse (**L**) de Meyer est donc réalisée pour X et $\hat{X}$; nous sommes donc bien dans les hypothèses de cet article et nous pouvons appliquer ce qui précède.

Posons

$$U(x, y) = \lim_{\lambda \to 0} U^\lambda(x, y).$$

La fonction $x \to U(x, y)$ (resp $y \to U(x, y)$) est excessive (resp coexcessive). En effet pour tout $\lambda > 0$, $U(x, y)$ est limite croissante des fonctions excessives $U^{\lambda'}(x, y)\,(\lambda' < \lambda)$; $U(x, y)$ est donc λ-excessive pour tout $\lambda > 0$, donc excessive.

IV.1. Comme dans [1] nous appelerons $\mathscr{V}_f(x)$ la base de filtre des voisinages fins presque boréliens de x. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme. *Pour tout x de E il existe un voisinage fin presque borélien de ξ-mesure finie.*

Démonstration. Pour tout x de E la fonction $y \to U(x, y)$ ne peut être identiquement nulle puisque $U^\lambda(x, .)$ n'est pas nul donc il existe un y de E tel que $U(x, y) > 0$. Donc

$$\exists\, V \in \mathscr{V}_f(x) \quad \exists\, a > 0 \quad \forall z \in V \quad U^\lambda(z, y) \geqq a\,;$$

or

$$\frac{1}{\lambda} \geqq \hat{U}^\lambda(V, y) = \int_V dz\, U^\lambda(z, y) \geqq a\,\xi(V)\,.$$

L'ensemble V répond à la question.

Proposition: *Un point x est finement récurrent (resp co-récurrent) si et seulement si la fonction $y \to U(x, y)$ (resp $y \to U(y, x)$) ne prend que les valeurs* 0 *et* $+\infty$.

Démonstration. Si x est finement transient, il existe $V \in \mathscr{V}_f(x)$ tel que

$$0 < U(x, V) = \int_V U(x, y)\,dy < \infty\,,$$

donc

$$\xi[\{y; 0 < U(x, y) < \infty\} \cap V] > 0\,,$$

ce qui entraine l'existence d'un y tel que $0 < U(x, y) < \infty$. Si x est finement récurrent, pour tout y de E d'après I.4.: ou bien il existe un W de $\hat{\mathscr{V}}_f(y)$ tel que $U(x, W) = 0$ ou bien pour tout W de $\hat{\mathscr{V}}_f(y)$, $U(x, W) = +\infty$. La fonction $y \to U(x, y)$ étant cofinement continue cela entraine dans le premier cas $U(x, y) = 0$ et dans le second eu égard au lemme précédent que $U(x, y) = +\infty$. Ce qui démontre la proposition.

IV.2. Théorème. a) *Les classes conservatives coïncident avec les classes récurrentes.*

b) *Un point finement transient ne peut conduire à un point finement récurrent.*

c) *Les classes récurrentes et co-récurrentes coïncident à des ensembles de potentiel nul prés. Soient $\boldsymbol{C}$ et $\hat{\boldsymbol{C}}$ deux telles classes* ($\xi(\boldsymbol{C} \Delta \hat{\boldsymbol{C}}) = 0$), *si x est un point de $\boldsymbol{C} \cap \hat{\boldsymbol{C}}$ alors*

$$\boldsymbol{C} = \{z; U(z, x) = \infty\}\,,$$
$$\hat{\boldsymbol{C}} = \{z; U(x, z) = \infty\}\,.$$

La trace de ξ sur $\boldsymbol{C} \cap \hat{\boldsymbol{C}}$ est invariante par les semi-groupes P_t et $\hat{P}_t$.

d) *Si* $\xi(\boldsymbol{C}) < \infty$, $\quad \lim_{\lambda \to 0} \lambda U^\lambda(x, .) = 1 \quad \xi$ p.s. *sur* $\boldsymbol{C}$,

Si $\xi(\boldsymbol{C}) = \infty$, $\quad \lim_{\lambda \to 0} \lambda U^\lambda(x, .) = 0 \quad \xi$ p.s. *sur* $\boldsymbol{C}$.

Démonstration. 1°) Soit $\boldsymbol{C}$ une classe récurrente et $\boldsymbol{D}$ la classe conservative associée. $\boldsymbol{D}$ est un ouvert fin, donc est chargé par ξ. $\xi \cap \boldsymbol{D}$ est une mesure excessive concentrée sur $\boldsymbol{D}$, donc invariante et si $x \in C$, $\xi \cap \boldsymbol{D}$ est équivalente à la mesure $U^\lambda(x, .)$. Comme

$$U^\lambda(x, A) = \int_A U^\lambda(x, y)\,dy$$

$\xi \cap \boldsymbol{D}$ est équivalente à $1\,\{y; U^\lambda(x, y) > 0\}\,\xi$ donc

$$\xi[\boldsymbol{D} \Delta \{y; U(x, y) = \infty\}] = 0\,.$$

2°) Pour tout $y \in E$, la fonction $x \to U(x, y)$ est excessive donc constante ξ-presque surement sur $\boldsymbol{D}$ d'après I.4., donc partout sur $\boldsymbol{D}$ puisque $\boldsymbol{D}$ est ouvert fin. Or si $x \in C$, $U(x, y)$ ne peut valoir que 0 ou $+\infty$, c'est donc aussi le cas pour tout point de $\boldsymbol{D}$ qui de ce fait est récurrent d'après la proposition précédente. a) est démontré.

3°) Soit $\boldsymbol{C}$ une classe récurrente. Pour ξ-presque tout x de $\boldsymbol{C}$ la fonction $y \to U(y, x)$ vaut $+\infty$ sur $\boldsymbol{C}$ car

$$\forall y \in C \quad \xi[C \Delta \{x; U(y, x) = \infty\}] = 0$$

et $y \to U(y, x)$ est constante sur $\boldsymbol{C}$.

Soit alors $x \in C$ tel que $U(y, x) = +\infty$ $\forall y \in \boldsymbol{C}$, et soit z tel que $U(x, z) = +\infty$. Soient $W \in \hat{\mathscr{V}}_f(x)$ et $W' \in \hat{\mathscr{V}}_f(z)$:

$$\xi(W \cap \boldsymbol{C}) = \xi(W \cap \{y;\, U(x, y) = \infty\}) > 0 \;;$$

en effet $W \cap \{y;\, U(x, y) = \infty\}$ contient un ouvert cofin contenant x, donc non vide et chargé par ξ.

De même $\xi(W' \cap \boldsymbol{C}) > 0$ et pour tout x de $\boldsymbol{C}$, $U(x, W') = \infty$. On a donc

$$\infty = E_{1_{W'}\xi} \int_0^\infty 1_W(X_s)\,ds = \int\int 1_{W'}(x)\,dx\, U(x, y)\, 1_W(y)\,dy$$

$$= \hat{E}_{1_W \xi} \int_0^\infty 1_{W'}(\hat{X}_s)\,ds\,.$$

Soit pour tout W de $\hat{\mathscr{V}}_f(x)$

$$\int_W \hat{U}(W', x)\,dx = \infty\,.$$

La fonction $x \to \hat{U}(W', x)$ étant cofinement continue cela implique $\hat{U}(W', x) = +\infty$. Donc pour tout W' de $\hat{\mathscr{V}}_f(z)$

$$\hat{U}(W', x) = +\infty \;;$$

z est donc cofinement récurrent et appartient à la classe co-récurrente de x: $\hat{C}(x)$ ce qui démontre la première partie de c).

4°) Supposons que z co-conduise à x (x étant choisi comme en 3°)), et montrons que $U(x, z) = +\infty; F = \{y;\, U(x, y) = \infty\}$ est un ouvert cofin presque-borélien contenant x donc

$$\hat{P}_z[\hat{T}_F < \infty] > 0$$

et

$$U(x, z) \geqq \hat{P}_F U(x, .)(z) = \hat{E}_z[1_{\{\hat{T}_F < \infty\}} U(x, X_{\hat{T}_F})] \;;$$

comme F est aussi un fermé cofin, $U(x, X_{\hat{T}_F}) = \infty$, donc $U(x, z) = +\infty$. Donc d'après 3°):

$$\{z;\, z \text{ coconduit à } x\} \subseteqq \{z;\, U(x, z) = \infty\} \subseteqq \hat{C}(x)$$

comme $\hat{C}(x) \subseteqq \{z;\, z \text{ coconduit à } x\}$ de manière évidente on a:

$$\hat{C}(x) = \{z;\, U(x, z) = \infty\} \;;$$

un point co-finement transient ne peut conduire à un point cofinement récurrent. Par dualité on a tout le reste de la partie c).

La partie d) est une conséquence immédiate de la proposition III.1.

IV.3. Ces résultats peuvent encore être améliorés si on ajoute l'hypothèse que les résolventes U^λ et $\hat{U}^\lambda$ sont fortement felleriennes (ce qui est en particulier entrainé par l'hypothèse (F) de Hunt cf. [7]). Désignons par (F') l'ensemble de ces hypothèses.

Proposition. *Sous l'hypothése* (F') *les classes récurrentes et corécurrentes coincident et sont ouvertes et fermées Lorsque* $\boldsymbol{E}$ *est connexe ou bien tous les points sont transients ou bien* $\boldsymbol{E}$ *est une classe* (*co-*)*récurrente.*

Démonstration. Les classes récurrentes sont fermées puisqu'elles coïncident avec les classes conservatives qui sont définies (cf. [1]) comme l'ensemble des points où une certaine fonction invariante prend la valeur 1. Comme d'autre part les fonctions $y \to U(y, x)$ et $y \to U(x, y)$ sont semi-continues inférieurement

$$C(x) = \{z: U(z, x) = \infty\} = \{z: U(z, x) > 0\}$$

et

$$\hat{C}(x) = \{z: U(x, z) = \infty\} = \{z: U(x, z) > 0\}$$

sont ouvertes.

Et ici $\xi(C \Delta \hat{C}) = 0$ entraine que $C \Delta \hat{C} = \emptyset$.

IV.4. Dans ce paragraphe nous nous placons toujours dans l'hypothèse (**F**$'$) sous laquelle Meyer ([10]) démontre qu'il existe une correspondance biunivoque entre les mesures ν σ-finies dont le λ-potentiel est fini partout et qui ne chargent pas les ensembles polaires (resp. semi-polaires) et les fonctionnelles additives A à discontinuités accessibles (resp. continues) telles que pour toute fonction borélienne bornée φ et pour $\lambda > 0$:

$$U^\lambda_{\varphi\nu} = U^\lambda_{\varphi A}$$

La mesure ν coincide alors avec la mesure ν_A définie en II.4. car

$$\begin{aligned}\langle \nu, \varphi\rangle &= \int \lambda \hat{U}^\lambda(E, y)\, \nu(dy)\, \varphi(y) = \lambda \int\int dx\, U^\lambda(x, y)\, \varphi(y)\, \nu(dy)\\ &= \lambda \int dx\, U^\lambda_{\varphi\nu}(x) = \lambda \int dx\, U^\lambda_{\varphi_A}(x) = \lambda E_\xi \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi(X_t)\, dA_t\\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt\, k(\varphi A) = \langle \nu_A, \varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

On peut donc compte tenu des résultats de la partie II, énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Etant donné un processus de Hunt satisfaisant à l'hypothese* (**F**$'$) *et récurrent, il existe une correspondance biunivoque* $A \to \nu_A$ *entre les classes d'équivalence de fonctionnelles additives σ-intégrables dont les λ-potentiels sont finis et les mesures σ-finies ne chargeant pas les ensembles polaires et dont les λ-potentiels sont finis.*

Cette correspondance possède les propriétés suivantes:

1) *A est continue si et seulement si ν_A ne charge pas les ensembles semi-polaires.*

2) *Pour toute fonction φ borélienne et positive*

$$U^\lambda_{\varphi A} = U^\lambda_{\varphi\nu_A}\,.$$

3) *Si A et B sont deux fonctionelles σ-additives, et φ, ψ deux fonctions boréliennes telles que*

$$\varphi \in \mathscr{L}^1_+(\nu_A)\,, \quad \psi \in \mathscr{L}^1_+(\nu_B) \quad \textit{et} \quad \langle \nu_B, \psi\rangle > 0$$

i) $$\lim_{t\to\infty} \frac{E_x \int_0^t \varphi(X_s)\, dA_s}{E_x \int_0^t \psi(X_s)\, dB_s} = \frac{\nu_A(\varphi)}{\nu_B(\psi)} \quad \mu - \text{p.s.};$$

ii) $\forall x \in D$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \varphi(X_s)\,dA_s}{\int_0^t \psi(X_s)\,dB_s} = \frac{\nu_A(\varphi)}{\nu_B(\psi)} \qquad Px\text{— } ps\,.$$

4) *Si* $\tau(t)$ *est le changement de temps associé à* A, ν_A *est invariante par le semi-groupe* $P_{\tau(t)}$ *et c'est la seule mesure* σ*-finie excessive pour* $P_{\tau(t)}$.

Remarque. La partie 3) de ce théorème était connue dans le cas du mouvement Brownien (cf. [9]).

Note sur épreuves: La démonstration de la proposition I. 4 ne vaut oue pour $\|\mu\| < \infty$. Dans le cas général, on remarque que $1_F\mu$ est excessive, donc invariante d'aprés I. 7; soit $1_F\mu = \mu$.

Bibliographie

1. Azema, J., M. Kaplan-Duflo et D. Revuz: Récurrence fine des processus de Markov. Ann. Inst. Henri Poincare II, No. 3, 185—220 (1966).
2. Brelot, M., G. Choquet et J. Deny: Séminaire de Théorie du Potentiel. 5éme année 1961.
3. Chung, K. L.: Markov chains with stationary transition probabilities. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
4. Dunford, N., et J. Schwarz: Linear operators. New York: Interscience Publishers 1958.
5. Dynkin, E. B.: Markov processes. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.
6. Harris, T. E.: The existence of stationary measures for certain Markov processes. Proc. Third Berkeley Sympos. math. Statist. Probability II. (1956).
7. Hunt, G. A.: Markov processes and potentials. Illinois J. Math. **2**, 151—213 (1958).
8. — La théorie du potentiel et les processus récurrents. Ann. Inst. Fourier **15**, 1—12 (1965).
9. Ito, K., et H. P. McKean: Diffusion processes and their sample paths. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.
10. Meyer, P. A.: Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov. Ann. Inst. Fourier **12**, 125—230 (1962).
11. Nagasawa, M., et K. Sato: Some theorems on time change and killing of Markov processes. Kodaï math. Sem. Reports **15**, 195—219 (1963).
12. Neveu, J.: Bases mathématiques du calcul des probabilités. Paris: Masson 1963.
13. — Théorie ergodique. Cours à la Faculté des Sciences de Paris (1965).
14. Widder, D. v.: Laplace transform. Princeton: Princeton University Press 1946.

Chaire de Calcul des Probabilités
et Physique Mathématique
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre-Curie
F-75 Paris 5